

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA  
ZAVOD ZA ELEKTRONIČKE SUSTAVE I OBRADU INFORMACIJA

# KOSINUSNO MODULIRANI FILTARSKI SLOGOVI

Seminar iz kolegija napredne metode digitalne obrade signala

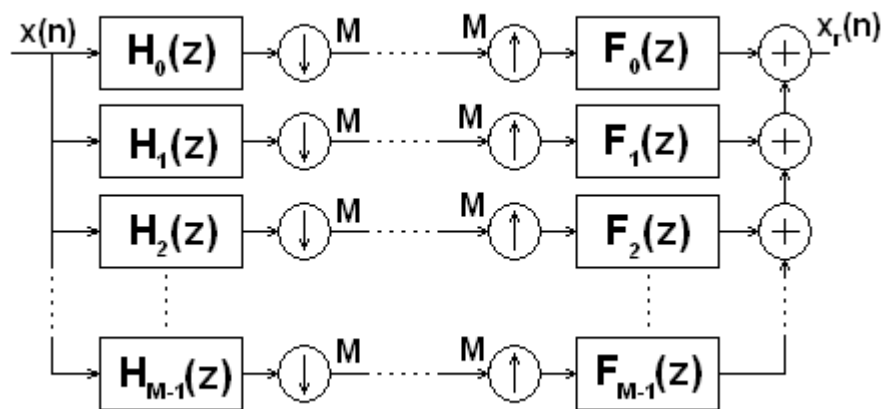
Petar Perišin  
0036402024

# Sadržaj

Sažetak.....	3
1. Uvod.....	4
2. Diskretna Fourierova transformacija (DFT).....	4
3. Diskretna kosinusna transformacija (DCT).....	6
4. Dizajn paralelnog kosinusno moduliranog filtarskog sloga .....	8
5. Dizajn prototip filtra.....	10
5.1 Kaiserov otvor.....	12
5.2 Ultraspherical vremenski otvor.....	12
6. Analiza rezultata.....	13

## Sažetak

U digitalnoj obradi signala jako je raširena upotreba filtarskog sloga. Na prvoj slici prikazana je paralelna reprezentacija M kanalnog filtarskog sloga. Oni se koriste mnogo prilikom obrade signala, a pogotovo slike, zvuka, video signala i drugim aplikacijama koje uključuju djeljenje ulaznog signala u više pojaseva, i na kraju rekonstrukciju ulaznog signala. Postoje dva pristupa u dizajnu M kanalnog filtarskog sloga: Slog sa potpunom rekonstrukcijom, i pseudo filtarski slog. Prvi pristup je bolji zbog potpune rekonstrukcije, a drugi zbog efikasnije realizacije, jer se realizira samo jedan prototip filtra. Razne modulacijske transformacije spadaju u ovu drugu kategoriju, a među njima se ističu kosinusna i diskretna Fourierova transformacija. U ovom seminaru se obrađuje paralelna realizacija kosinusno moduliranog filtarskog sloga s Kaiserovim otvorom kao niskopropusnim prototipnim filtrom.

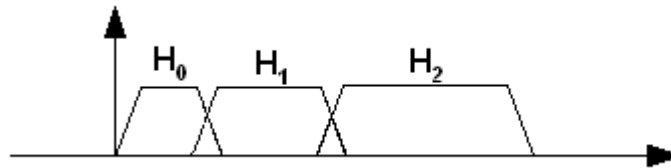


Slika 1: Paralelna realizacija maksimalno decimiranog filtarskog sloga

## 1. Uvod

Realizacija M kanalnog filtarskog sloga je jako kompleksno područje. Većina načina dizajniranja koje smo do sada upoznali su uključivali projektiranje karakteristika svih (analizirajućih) filtera, što može biti zamorno, pogotovo za velike M. Kompleksnost dizajniranja se može smanjiti upotrebom neuniformnih filtarskih slogova, ili upotrebom uniformnih moduliranih filtarskih slogova. Upotreba neuniformnih filtarskih slogova smanjuje nam broj filtera, jer visokofrekvencijski filtri nisu jednake osjetljivosti kao i niskopropusni. Najbolji primjer za ovo je ljudsko uho. Ono razlikuje frekvencije 100 i 150 Hz, dok će frekvencije 10.000 i 10.050 Hz registrirati kao jednu te istu frekvenciju. Tada prilikom analize za niske frekvencije moramo koristiti osjetljivije filtre, dok za visoke to nije nužno. Zbog ovog se

neuniformni filtri dosta koriste u obradi zvuka.



Slika 2: Neuniformna raspodjela filtarskih slogova

## 2. Diskretna Fourierova transformacija (DFT)

Osim neuniformnih filtara, problem realizacije velikog broja filtara na jako jednostavan i efektivan način možemo riješiti upotrebom modulatorskih filtarskih slogova. Pri tom postoje dva načina i za to: upotreba diskretne Fourierove transformacije (DFT) i korištenje diskretne kosinusne transformacije (DCT). Radi boljeg razumjevanja kosinusno moduliranog filtarskog sloga potrebno je objasniti diskretnu Fourierovu transformaciju.

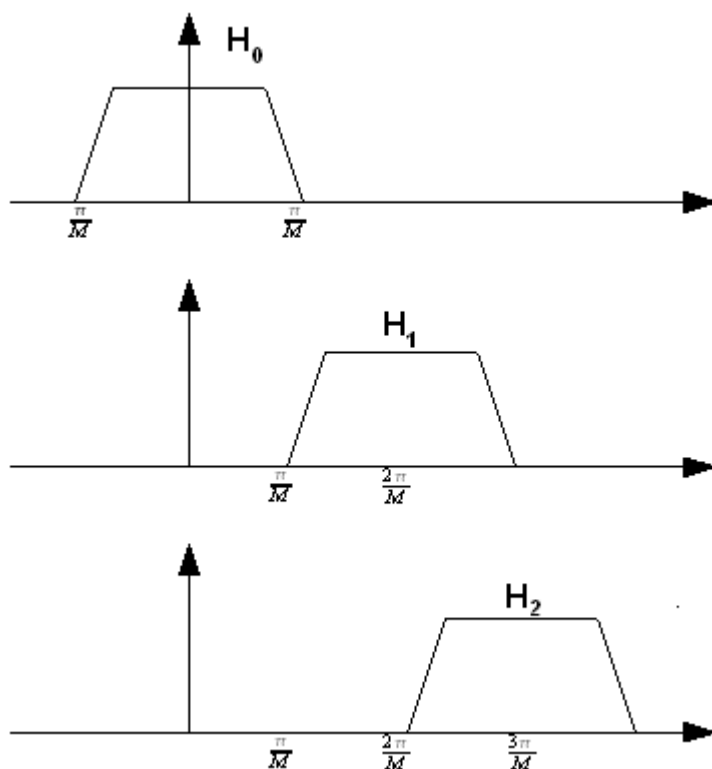
Diskretna Fourierova transformacija predstavlja jednostavniji oblik moduliranog filtarskog sloga. Njena paralelna realizacija je predstavljena na slici 1. Signal se rastavlja u  $M$  pojaseva gdje se filtrira filterima od  $H_0(z)$  do  $H_{M-1}(z)$ . Realizacija tih filtara se kod DFT-a vrši na jako jednostavan način – realizira se samo jedan niskopropusni prototip filtar  $H_0(z)$ , a ostalih  $M-1$  se dobiva modulacijom, odnosno pomicanjem frekvencijske karakteristike prototipa filtra. Pomicanje te karakteristike je prikazano na slici 3. Za  $M$  kanalni filtarski slog potrebno je  $M-1$  DFT pomicanja.

U matematici pomicanje frekvencijske karakteristike odgovara sa  $H_0(z)$  na  $H_k(z)$  odgovara množenju frekvencijske karakteristike sa  $e^{-j2\pi\frac{k}{M}}$ , iz čega proizlazi relacija za  $k$ -ti filtar i impulsni odziv

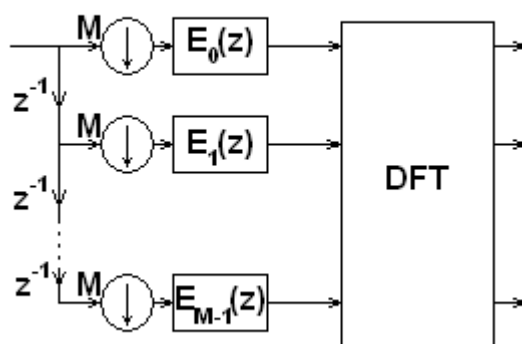
$$H_k(z) = H_0(z e^{-j2\pi\frac{k}{M}})$$

Iz kojih se vidi jednostavnost realizacije ostalih  $M-1$  filtara.

Dok je paralelna (direktna) realizacija DFT-a lakša za razumjevanje, algoritam kojim se ona implementira je kompleksniji. Zbog toga se prilikom realizacije DFT-a na računalu češće koristi polifazna reprezentacija prikazana na slici 4.



Slika 3: Prototip filter (prvi graf) i prve dvije pomaknute frekvencijske karakteristike kod DFT-a



Slika 4: polifazna reprezentacija DFT filterarskog sloga

Nedostatak DFT filterarskih slogova je to što za  $M > 2$  frekvencijska karakteristika postaje kompleksna, jer se karakteristika množi s  $e^{-j2\pi\frac{k}{M}}$ , pa impulsni odziv k-tog filtra iznosi

$$h_k[n] = h_0[n] e^{-j2\pi\frac{k}{M}n}$$

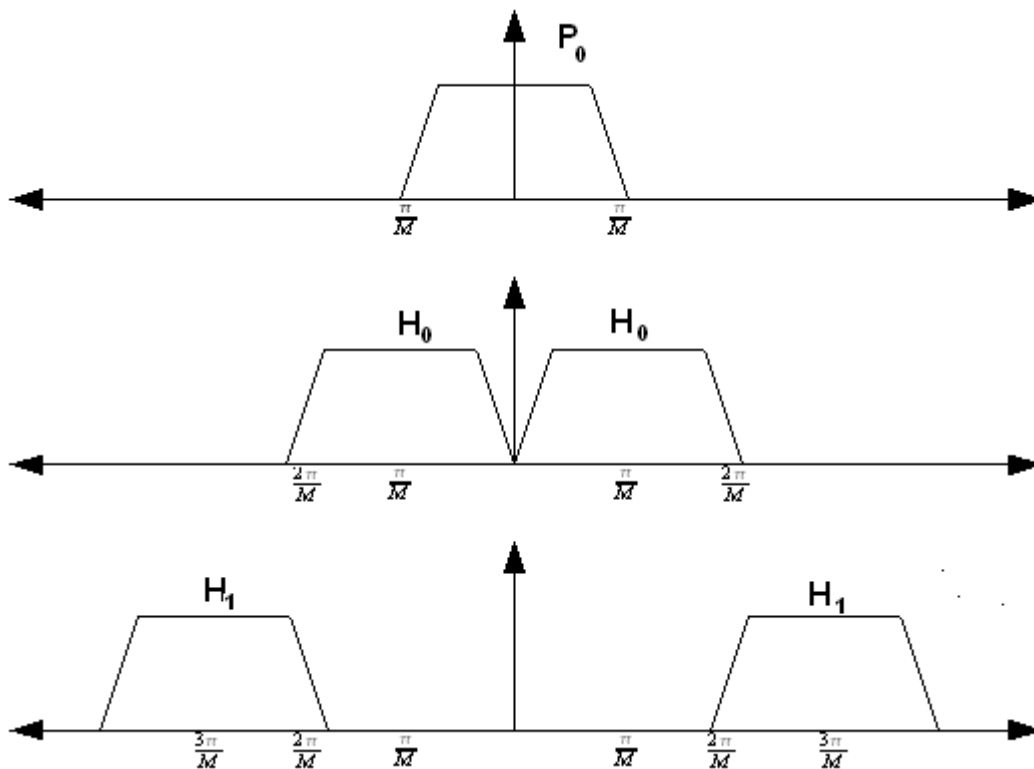
Osim toga, u DFT-u je za realizaciju M filtera, potrebno M-1 transformacija, dok je kod DCT-a to dvostruko manje.

### 3. Diskretna kosinusna transformacija (DCT)

Pristup kosinusno moduliranom filtarskom slogu je jako sličan pristupu diskretnoj Fourierovoj transformaciji. Projektira se samo niskopropusni prototip filtra. Kako vrijedi:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

množenje kosinusom znači i množenje sa dvije eksponencijale što za posljedicu u frekvencijskoj domeni ima pomicanje frekvencijske karakteristike.



Slika 5: prototip filtra (prvi graf), prvo modulacijsko pomicanje za  $\pi/M$  (drugi graf), drugo modulacijsko pomicanje za  $2\pi/M$  (treći graf)

Za razliku od diskretne Fourierove transformacije koja pomiče frekvencijsku karakteristiku u samo jednu stranu, diskretna kosinusna transformacija je i udvostručuje. Jedan pomak se vrši u lijevu stranu, a drugi u desnu. Time sa  $M/2$  transformacija možemo realizirati  $M$  filtara.

Ako na slici 5 prototip filtra (prvi graf) označimo sa  $P_0(z)$ , a njegove modulacijski pomicanane slike sa  $H_k(z)$ , uz  $N=2M$  vrijede relacije:

$$H_0(z) = \alpha_0 P_0(z e^{-j\frac{\pi}{2M}}) + \alpha_0' P_0(z e^{j\frac{\pi}{2M}}) \quad \text{za drugi graf}$$

$$H_1(z) = \alpha_1 P_0(z e^{-j(2+1)\frac{\pi}{2M}}) + \alpha_1' P_0(z e^{j(2+1)\frac{\pi}{2M}}) \quad \text{za treći graf}$$

Daljnim moduliranjem možemo dobiti ostalih  $M-1$  izlaza. Pokazuje se da za  $H_k(z)$  vrijedi :

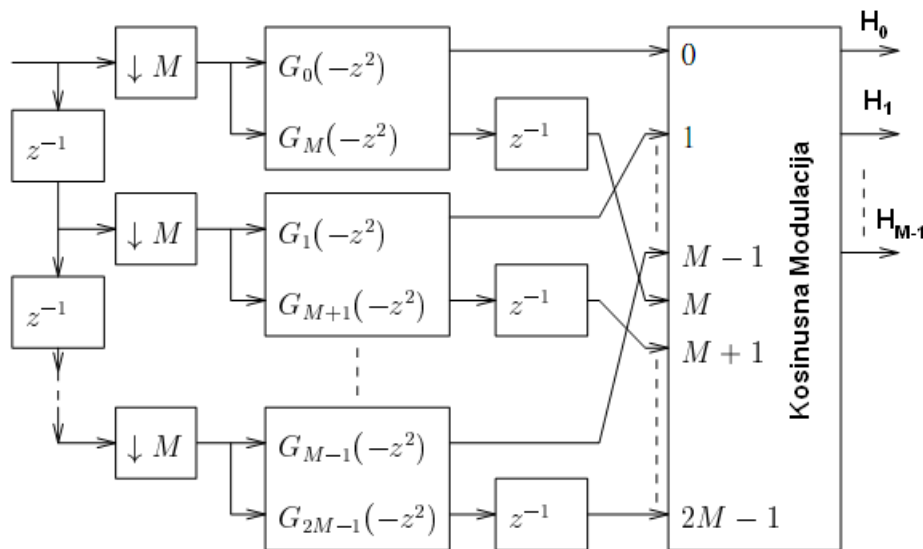
$$H_k(z) = \alpha_k P_0(z e^{-j(2k+1)\frac{\pi}{2M}}) + \alpha_k' P_0(z e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2M}})$$

a impulsni odzivi analizirajućih i rekonstrukcijskih filtera su:

$$h_k[n] = 2p_0[n] \cos \left\{ \frac{\pi}{2M} (2k+1) \left( n - \frac{N-1}{2} \right) + (-1)^k \frac{\pi}{4} \right\} \quad \text{za } n=0, \dots, N-1$$

$$f_k[n] = 2p_0[n] \cos \left\{ \frac{\pi}{2M} (2k+1) \left( n - \frac{N-1}{2} \right) - (-1)^k \frac{\pi}{4} \right\} \quad \text{za } n=0, \dots, N-1$$

Osim direktne paralelne reprezentacije filtarskog sloga postoji i polifazna reprezentacija. Ona se češće koristi zbog manje kompleksnosti.



Slika 6: Polifazna reprezentacija analizirajuće strane kosinusno moduliranog filtarskog sloga

## 4. Dizajn paralelnog kosinusno moduliranog filtarskog sloga

Slika 1 prikazuje paralelnu strukturu M kanalnog maksimalno decimiranog filtarskog sloga. Ulazno-izlazni odnosi za kosinusno moduliran filtarski slog glase:

$$X_r(z) = T_0(z)X(z) + \sum_{l=1}^{M-1} T_l(z)X(zW_M^l)$$

gdje je  $W_M = e^{-j2\pi/M}$ , i

$$T_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z)H_k(zW_M^l) \quad \text{za } l = 0, 1, \dots, M-1.$$

U jednadžbi s ulazno izlaznim odnosom  $T_0(z)$  predstavlja transfer funkciju filtarskog sloga, a  $T_l(z)$  su aliasing transfer funkcije.  $H_k(z)$  i  $F_k(z)$  predstavljaju pojedine transfer funkcije analizirajućih i sintetizirajućih filtara. Pretpostavljajući duljinu filtera  $N$  impulsni odzivi analizirajućih i rekonstrukcijskih filtara glase:

$$\begin{aligned} h_k[n] &= 2h_p[n] \cos\left\{\omega_k\left(n - \frac{N-1}{2}\right) + \theta_k\right\} && \text{za } k = 0, 1, \dots, M-1 \\ f_k[n] &= h_k[N-1-n] && \text{za } k = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

gdje je  $h_p[n]$  impulsni odziv nerekurzivnog prototip filtra duljine  $N$  s linearnom fazom, a

$$\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2M} \quad \text{i} \quad \theta_k = (-1)^k \frac{\pi}{4}$$

Kod filtarskih slogova susrećemo tri vrste pogrešaka: faznu, amplitudnu i aliasing. Kod kosinusno moduliranih filtarskih slogova fazna pogreška se eliminira upotrebom filtara s linearnom fazom. Kao posljedica toga javlja se pogreška u amplitudnom odzivu:

$$e_m(\omega) = 1 - |T_0(e^{j\omega})| \quad \text{za } \omega \in [0, \pi]$$

aliasing u najgorem slučaju

$$e_a(\omega) = \max_{1 \leq l \leq M-1} |T_l(e^{j\omega})| \quad \text{za } \omega \in [0, \pi]$$



i ukupna pogreška zbog aliasinga:

$$e_{ia}(\omega) = \left[ \sum_{l=1}^{M-1} |T_l(e^{j\omega})|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{za } \omega \in [0, \pi]$$

Mala rekonstrukcijska pogreška se može postići dizajniranjem niskopropusnog prototipnog filtra koristeći metodu otvora. Ta metoda kreira filter sa simetričnim impulsnim odzivom, čime se postiže konstantno grupno kašnjenje i realizaciju filtra s manje operacija. Filter koji možemo realizirati dobivamo množeći beskonačan impulsnu odziv s funkcijom otvora, tj:

$$h_p[n] = w[n] h_{id}[n]$$

gdje je  $w[n]$  funkcija otvora duljine  $N$ , i  $h_{id}[n]$  :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_c}{\pi} & \quad \text{za } n=0 \\ \frac{\sin \omega_c n}{n \pi} & \quad \text{za } n \neq 0 \end{aligned}$$

gdje je  $\omega_c$  granična frekvencija. Tražena valovitost u području gušenja i preklapanje kanala mogu se postići odabirom nerekurzivnog niskopropusnog filtra koji zadovoljava slijedeće uvjete:

$$\begin{aligned} 1 - \delta_p \leq H_p(e^{j\omega}) \leq 1 + \delta_p & \quad \text{za } |\omega| \in [0, \omega_p] \\ -\delta_a \leq H_p(e^{j\omega}) \leq \delta_a & \quad \text{za } |\omega| \in [\omega_a, \omega_s/2] \end{aligned}$$

gdje su  $\delta_p$  i  $\delta_a$  valovitosti u području propuštanja i gušenja, a  $\omega_p$  i  $\omega_a$  krajnje frekvencije područja propuštanja i gušenja. Za filtere koji su dizajnirani metodom vremenskih otvora vrijedi aproksimacija  $\delta_a \approx \delta_p$ . Kao posljedica, protutip filter se može odabrati tako da se postigne atenuacija u području gušenja

$$\delta_a = 10^{0.05A_a}, \text{ ili} \\ A_a = 20 \log(\delta_a)$$

Također, izjednačavanje  $\delta_a \approx \delta_p$  nam omogućuje i izjednačavanje valovitosti u području propuštanja i gušenja  $A_a = A_p$ . Prijelazno područje filtra  $B$  i granična frekvencija  $\omega_c$  se definiraju kao

$$\begin{aligned} B &= \omega_a - \omega_p \\ \omega_c &= \frac{(\omega_p + \omega_a)}{2} \end{aligned}$$

## 5. Dizajn prototip filtra

Uvjeti za aproksimativnu rekonstrukciju u filtarskom slogu mogu biti izraženi preko amplitudnog odziva prototip filtra I filtarskog sloga:

$$|H_p(e^{j\omega})| \approx 0 \quad \text{za} \quad |\omega| > \frac{\pi}{M}$$

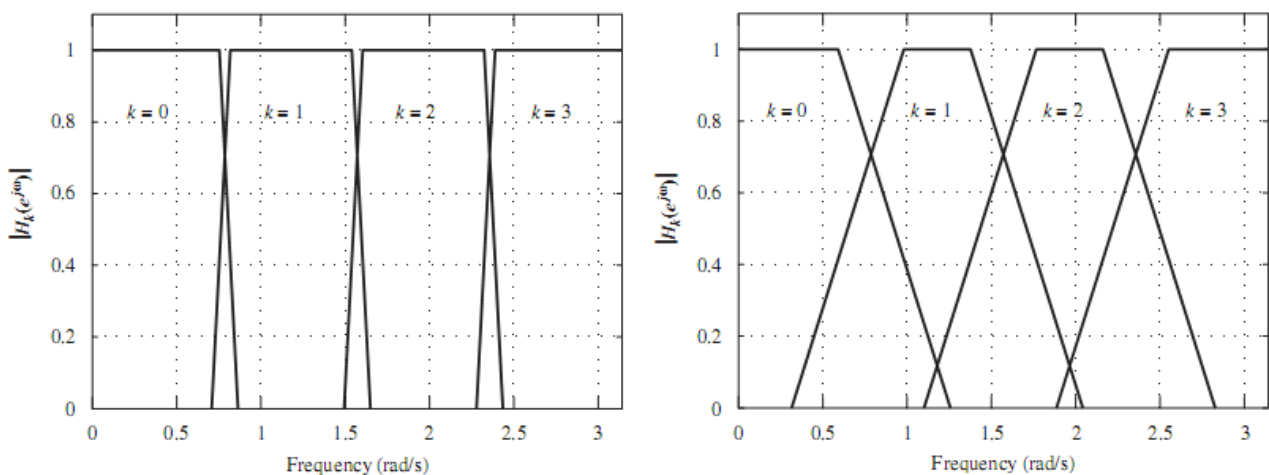
$$|T_0(e^{j\omega})| = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{2M-1} |H_p(e^{j(\omega - k\pi/M)})|^2 \approx 1$$

Pogreške za ove aproksimacije već su navedene. To su pogreška u amplitudnom odzivu  $e_m$ , aliasing u najgorem slučaju  $e_a$  i ukupni aliasing  $e_{ta}$ .

Prototip filtar kosinusno moduliranog filtarskog sloga karakterizira atenuacija u području gušenja  $A_a$  u dB, te granična frekvencija u području gušenja

$$\omega_a = \frac{(1 + \rho)\pi}{2M}$$

gdje je  $\rho$  takozvani “roll-off” faktor, koji bitno utječe na područje preklapanja filtera. Ako je  $0 \leq \rho \leq 1$  tada svako propusno područje se preklapa sa susjedna dva područja, dok za  $1 \leq \rho \leq 2$  svako pojasno područje preklapaju četiri pojasna područja, tj po dva sa svake strane, kako je to prikazano na slici 7.



Slika 7: ovisnost preklapanja o roll-off faktoru, za  $\rho < 1$  (a) i za  $\rho > 1$  (b)

Pogreška u amplitudnom odzivu se smanjuje dizajniranjem prototip filtra tako da vrijedi  $|H_p(e^{j\pi/2M})|^2 \approx \frac{1}{2}$  na frekvenciji  $\omega = \frac{\pi}{2M}$ . To znači da sa zadanim  $M$ ,  $\rho$  i  $A_a$  dobivamo optimalno rješenje ako postavimo graničnu frekvenciju prototip filtra  $0 \leq \omega_p \leq \pi/2M$ , tako da zadana granična frekvencija zadovoljava jednadžbu optimizacije

$$F = \left[ |H_p(e^{j\pi/2M})| - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^2 \text{ za minimalan } \omega_p .$$

To znači da za svaki odabir  $M$ ,  $\rho$  i  $A_a$  trebamo ponovno izračunavanje svih parametara, kao što su duljina filtra, njegovi parametri i koeficijenti te njegov impulsni odziv. Postoji više metoda za proračun takvih vremenskih otvora, a najpoznatiji su Kaiserov, Saramaki i ultraspherical otvori.

## 5.1 Kaiserov otvor

Kaiserova funkcija vremenskog otvora glasi:

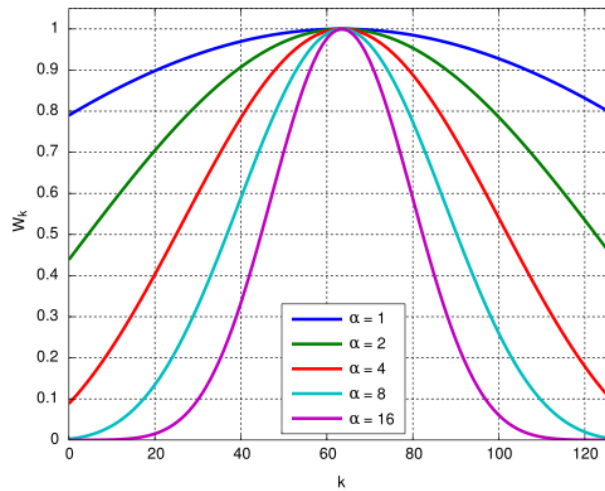
$$w[n] = \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)}$$

za  $n=1, \dots, N$ . Za  $n=0$  je  $w[0]=0$ . Pri tom je koeficijent  $\alpha$  određuje oblik otvora kako je to prikazano na slici, a  $I_0(x)$  je modificirana beselova funkcija nultog reda i prve vrste. Za nju vrijedi:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(x/2)^r}{r!}$$

Postoje mnogi proračuni za procjenu  $\alpha$  parametra, a u našem slučaju vrijedi aproksimacija

$$\alpha = 0.1102(A_a - 8.7) \quad \text{za } A_a > 50$$



Slika 8: ovisnost oblika Kaiserovog otvora o  $\alpha$

## 5.2 Ultraspherical vremenski otvor

Ultraspherical je još jedan vremenski otvor koji se može koristiti prilikom proračuna prototip filtra. Njihova formula glasi:

$$w[n] = \frac{A}{p-n} \binom{\mu+p-n-1}{p-n-1} \sum_{m=0}^n \binom{\mu+n-1}{n-m} \binom{p-n}{m} B^m \quad \text{za } n=0, \dots, N-1$$

Pri tom za koeficijente A, B i p vrijede relacije:

$$\begin{aligned} A &= \mu x_\mu^p, \text{ osim za } \mu=0 \text{ kada je } A = x_\mu^p \\ B &= 1 - x_\mu^{-2} \\ p &= N - 1 \end{aligned}$$

U ovim relacijama  $\mu$ ,  $x_\mu$  i N su nezavisni parametri koji se računaju u ovisnosti o  $A_a$  :

$$\begin{aligned} \mu &= -1.721 * 10^5 A_a^2 + 6.721 + 10^{-3} A_a + 0.1897 \\ N &\geq \frac{D\omega}{B_t} + 1 \\ x_\mu &= \frac{x_{N-1}^{(\mu)}}{\cos(\beta\pi/N)} \end{aligned}$$

Za ultraspherical otvor vrijedi i svojstvo simetričnosti:

$$w[N-n-1] = w[n]$$

Saramaki otvor je posebna verzija ultraspherical otvora.

## 6. Analiza rezultata

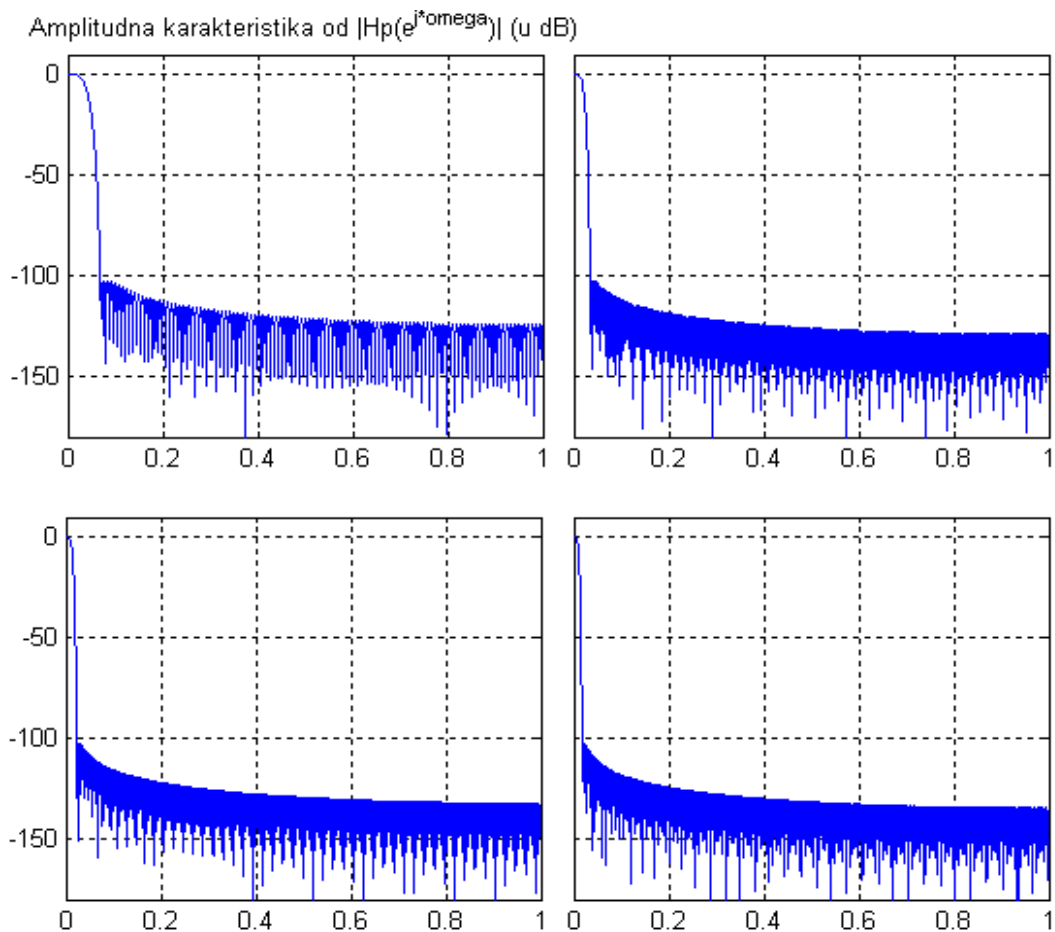
Ulaznoj funkciji zadajemo 3 parametara:

- $M$  : broj pojaseva
- $A_a$  : Prigušenje u području gušenja
- $\rho$  : roll-off faktor

Osim toga, funkcija omogućuje rad sa i bez decimacije za nekoliko predefiniranih signala.

Red prototip filtra, a time i kompleksnost algoritma, bitno ovise o ta tri predefinirana faktora. O broju pojaseva bitno ovisi  $M$ , budući se cijela spektralna domena mora podijeliti u  $M$  pojaseva. Što ima više pojaseva, prototip filter mora biti uži, što doprinosi njegovoj kompleksnosti. Za detalje pogledajte slijedeći primjer

**Primjer 1:** Odabrani su konstantni koeficijenti  $\rho=1.0$  ,  $A_a=100$  . Za  $M$  smo uzeli navedene vrijednosti za koje smo dobili određene redove filtra  $N$  (slika 9):



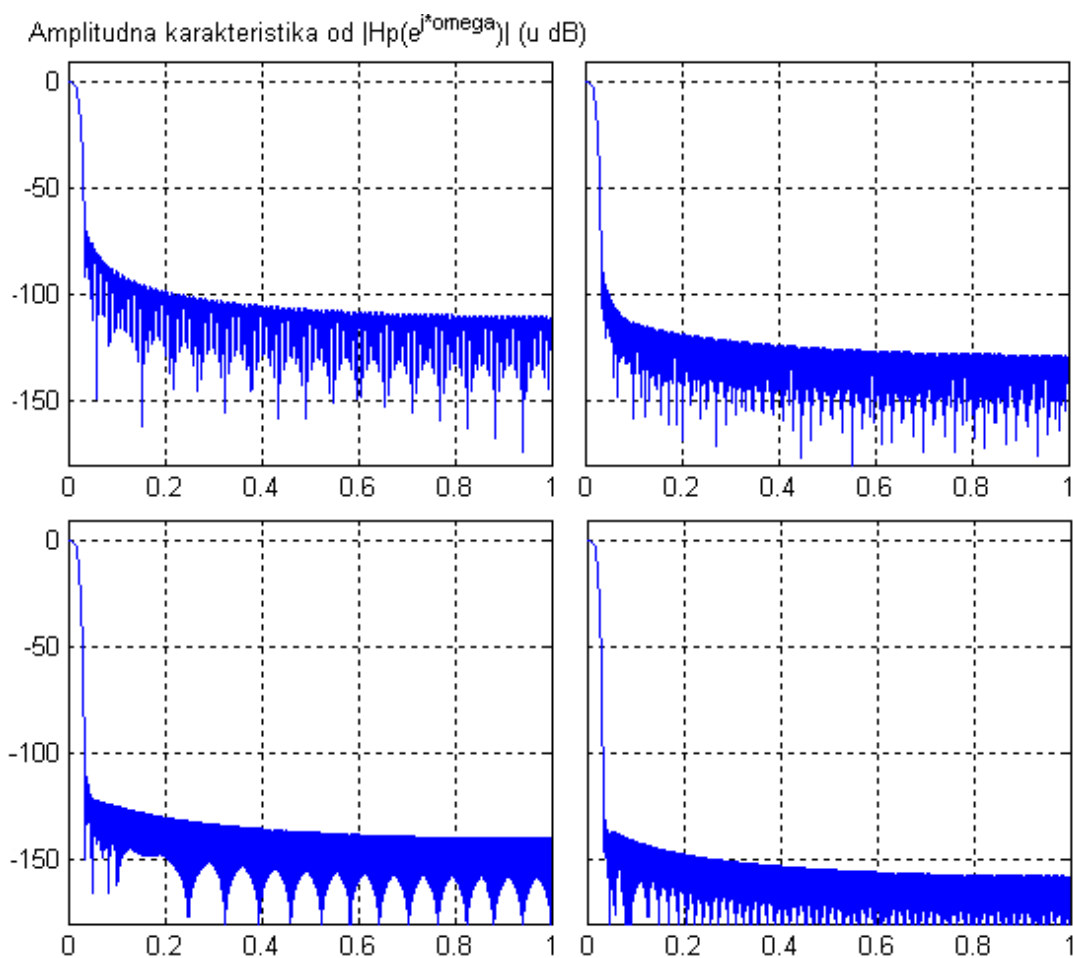
Slika 9: Prototip filter u ovisnosti o  $M$

- $M=15 \Rightarrow N=255$
- $M=30 \Rightarrow N=451$
- $M=45 \Rightarrow N=676$
- $M=60 \Rightarrow N=902$

Prigušenje u području gušenja  $A_a$  također mnogo utječe na sam red filtra. Lako je zaključiti da će s povećanjem tog faktora kompleksnost, odnosno red filtra  $N$ , porasti, budući zahtjev za većim gušenjem zahtjeva veću strminu prijelaznog područja.

**Primjer 2:** Odabrani su konstantni koeficijenti  $M=30$  i  $\rho=1.0$ . Za  $A_a$  smo uzeli navedene vrijednosti za koje smo dobili određene redove filtra  $N$  (slika 10):

- $A_a=70 \Rightarrow N=313$
- $A_a=90 \Rightarrow N=405$
- $A_a=110 \Rightarrow N=496$
- $A_a=130 \Rightarrow N=586$

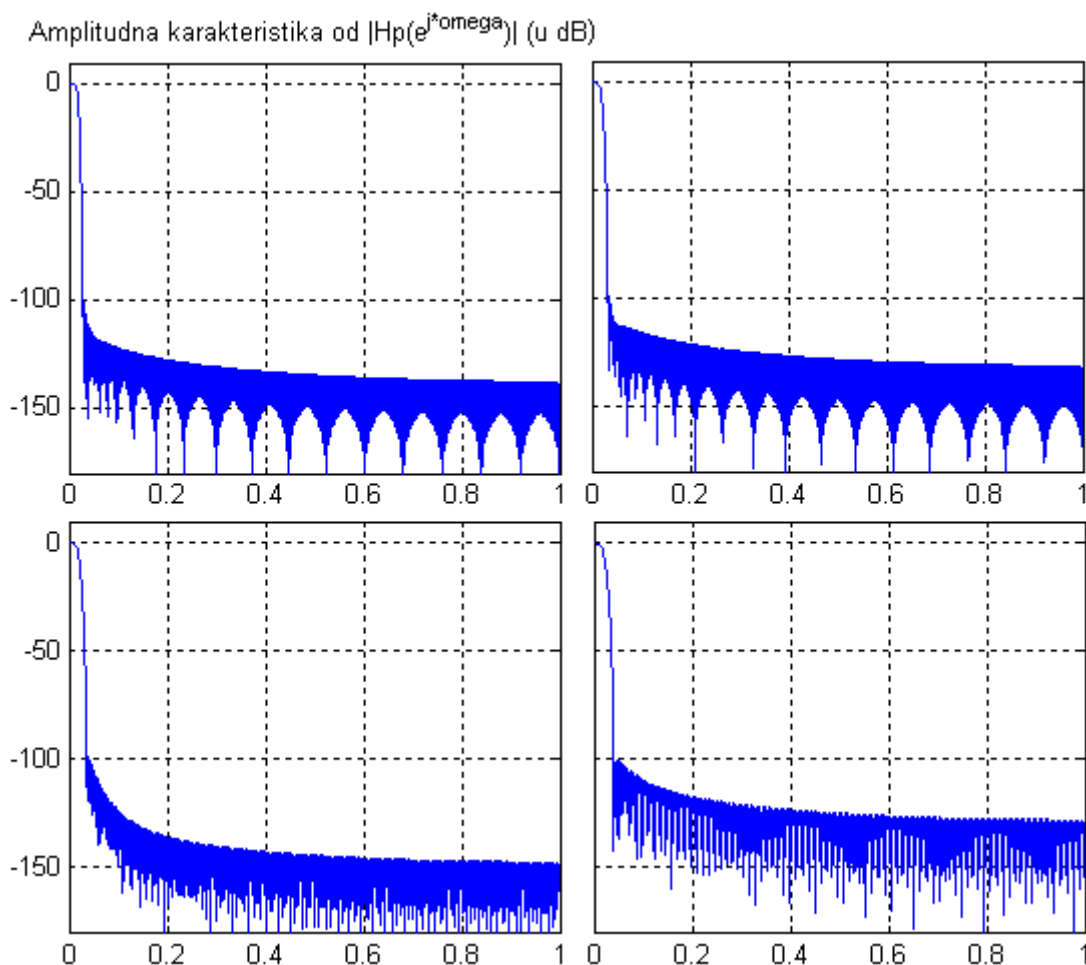


Slika 10. Izgled prototip filtra u ovisnosti o  $A_a$

Roll-off faktor  $\rho$  također bitno doprinosi kompleksnosti algoritma. Taj faktor nam govori koliko će se susjedni pojasevi preklapati. Kao što je već rečeno, kad je  $\rho$  manji od 1, jedan pojasno propusni filter preklapaju samo dva susjedna filtra, po jedan sa svake strane. Za  $\rho$  veći od 1, svaki od pojasno propusnih filtera preklapaju susjedna četiri filtra, po dva sa svake strane. Može se zaključiti da uz sve ostale vrijednosti konstantne, red filtra pada s porastom roll-off faktora, budući nagib filtra u prijelaznom pojasu opada s porastom roll-off faktora. Za detalje pogledajte slijedeći primjer

**Primjer 3:** Odabrani su konstantni koeficijenti  $M=30$  i  $A_a=100$ , a za  $\rho$  smo uzeli navedene vrijednosti za koje smo dobili slijedeće redove filtra  $N$  (slika 11):

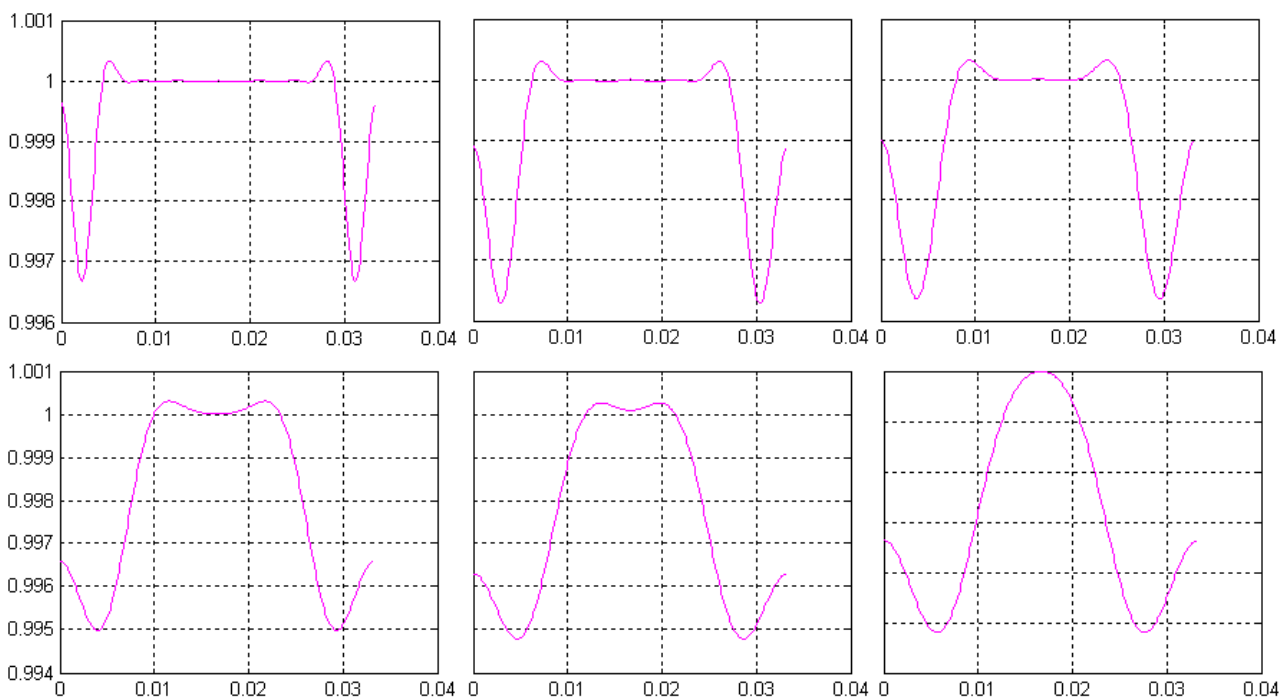
- $\rho=0.6 \Rightarrow N=752$
- $\rho=0.9 \Rightarrow N=501$
- $\rho=1.1 \Rightarrow N=409$
- $\rho=1.4 \Rightarrow N=322$



Slika 11: Izgled prototip filtra u ovisnosti o roll-off faktoru  $\rho$

Osim toga, kako o roll-off faktoru ovisi preklapanje susjednih filtara, o njemu ovisi i pogreška. Na slici 12 vidimo kako pogreška raste za slijedeće vrijednosti roll-off faktora. Kada je vrijednost na grafu 1, pogreške nema. Vidimo da se pogreška povećava kako se približavamo graničnim frekvencijama.

- $\rho=0.5 \Rightarrow N=902$
- $\rho=0.7 \Rightarrow N=644$
- $\rho=0.9 \Rightarrow N=501$
- $\rho=1.1 \Rightarrow N=409$
- $\rho=1.3 \Rightarrow N=346$
- $\rho=1.5 \Rightarrow N=300$

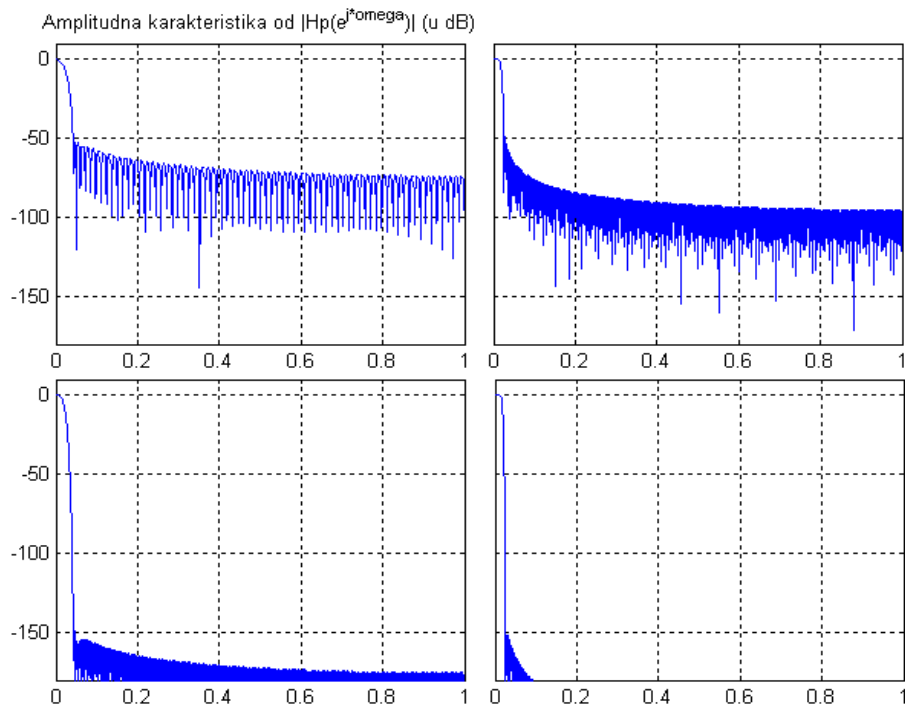


slika 12: ovisnost pogreške o roll-off faktoru

Napraviti ćemo još jedan primjer sa krajnjim vrijednostima  $\rho$  i  $A_a$ . Vrijednost M smo postavili na 30.

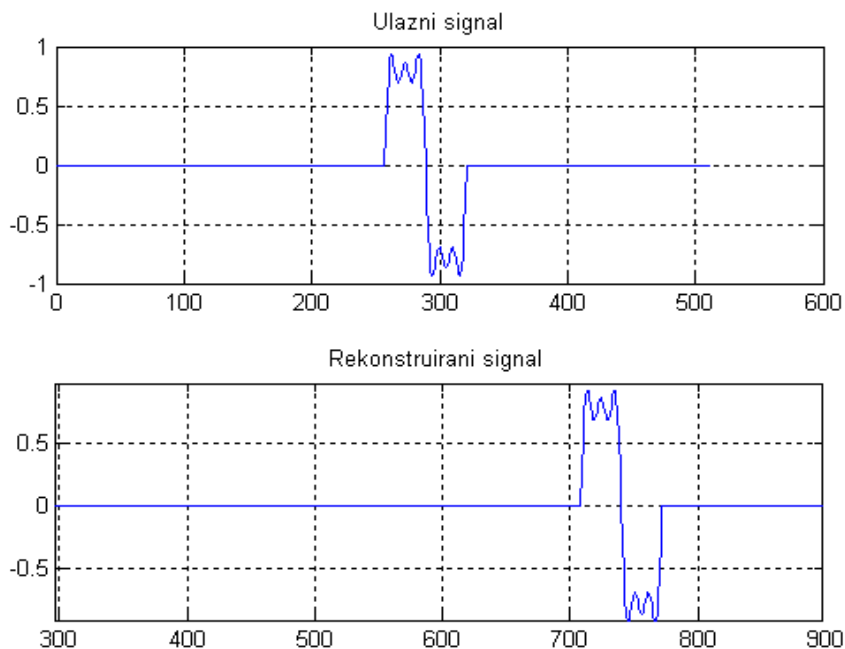
- $\rho=1.5$ ,  $A_a=50 \Rightarrow N=147$  - najjednostavniji filter
- $\rho=0.5$ ,  $A_a=50 \Rightarrow N=442$
- $\rho=1.5$ ,  $A_a=150 \Rightarrow N=450$
- $\rho=0.5$ ,  $A_a=150 \Rightarrow N=1352$  - najkompliciraniji filter





Slika 12: Prototip filtar za ekstremnije vrijednosti  $\rho$  i  $A_a$

**Primjer 4:** Ulazni i rekonstruirani signal za  $M=30$ ,  $A_a=100$  i  $\rho=1.0$ . Vidimo da izlaz jako dobro prati ulazni signal, samo kasni.



Slika 13: primjer ulaznog i rekonstruiranog signala

## 7. Literatura

1. Stuart W.A. Bergen, Andreas Antoniou, An efficient closed-form design method for cosine-modulated filter banks using window functions, *Signal Processing* (2006), doi:10.1016/j.sigpro.2006.08.003
2. S.W.A. Bergen, A. Antoniou, Design of nonrecursive digital filters using the ultraspherical window function, *EURASIP J. Appl. Signal Process.* 2005 (12) (2005) 1910–1922.
3. internet, posebno [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)