

Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Seminar iz kolegija Napredne metode digitalne obradbe signala

**Korištenje wavelet paketa za rješenje problema slijepe  
separacije 1-D signala i slika**

Ivan Ivek

24. siječanj 2007.

## Uvod u problematiku

Problem slijepe separacije signala (engl. *Blind Signal Separation*) susrećemo u različitim poljima primjene, kada nam je poznat samo skup linearnih kombinacija signala, a sami signali i koeficijenti linearne kombinacije su nam nepoznati. Tada želimo estimirati matricu kombinacijskih koeficijenata (matricu miješanja, engl. *mixing matrix*) i rekonstruirati nepoznate izvorne signale (izvore, engl. *sources*).

Visoka kvaliteta separacije postiže se sa izvorima koji imaju svojstvo rijetkosti (engl. *sparseness*), tj. većina vrijednosti uzoraka izvora jednaka je nuli. Rijetkost signala može biti istaknuta kad signal reprezentiramo u pogodnoj domeni transformacije, npr. koristeći *Wavelet* transformaciju.

Dva su osnovna pristupa rješenju problema: geometrijski te PCA (*Principal Component Analysis*) ICA (*Independent Component Analysis*), koji su ovdje demonstrirani.

## Teorijska podloga

Problem BSS koji razmatramo pretpostavlja postojanje  $n$  nepoznatih nezavisnih izvora  $s_1(t), \dots, s_n(t)$  i  $m$  poznatih mješavina  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  dobivenih linearnom kombinacijom

$$x_i(t) = a_{i,1} s_1(t) + \dots + a_{i,k} s_k(t) + \dots + a_{i,n} s_n(t),$$

gdje su  $a_{i,j}$  koeficijenti miješanja.

Zapisano matrično:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}(t)$$

Rješenje tako formuliranog problema svodi se na pronalaženje  $\mathbf{s}(t)$  koristeći podatke  $\mathbf{x}(t)$ .

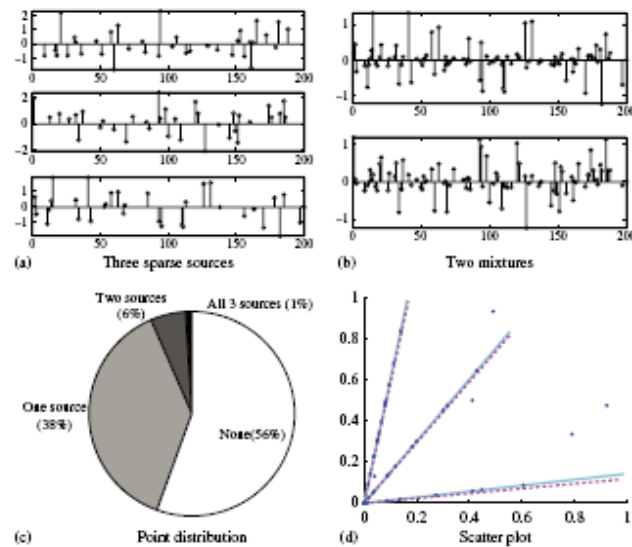
Za slučaj  $m = n$ , tražimo matricu inverznu matrici mješanja  $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}$  pomoću koje dobivamo  $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W} \mathbf{x}(t),$$

koji je aproksimacija matrice izvora  $\mathbf{s}(t)$ .

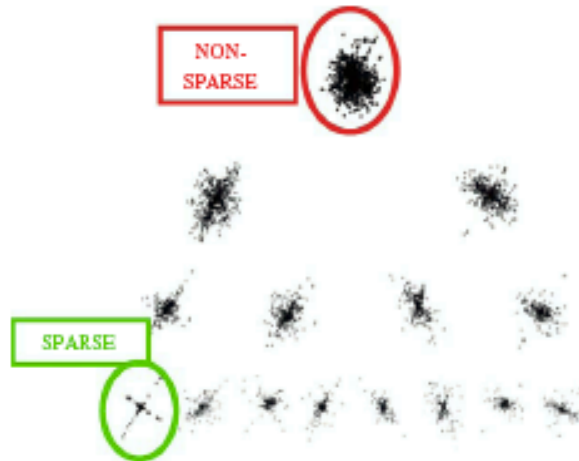
## 1. Motivacija za rijetki prikaz signala

Promotrimo primjer tri rijetka izvora prikazana na slici 1.a. Oni su odabrani tako da većina impulsa iz tih izvora ne koincidira duž vremenske osi. Svojstvo malo vjerojatnog zajedničkog pojavljivanja impulsa karakteristično je za prirodno rijetke izvore. Fotografije i njihove mješavine imaju vrijednosti različite od nule u gotovo svim pikselima te zbog toga imaju visoku kros-korelaciju.



Slika 1a.: Rijetki izvori i njihove mješavine

Kada su izvori rijetki, linearne mješavine mogu se razdvojiti geometrijskim metodama, nakon projekcije uzoraka u prostor stanja.



Slika 2a.: Ne-rijetki izvori u WP domeni

Rijetku reprezentaciju signala možemo dobiti transformacijom u WP domenu. Tada koeficijenti određenih čvorova WP drva pokazuju rijetkost.

## 2. Geometrijska metoda

Biti će opisana uz slike dobivene kao rezultat projekta, u eksperimentu sa 1D signalima

## 3. PCA

PCA se koristi za minimizaciju statističke ovisnosti drugog reda signala dijagonalizacijom kovarijacijske matrice.

Promatramo signale sa srednjom vrijednosti jednakom nuli. Elementi kovarijancijske matrice takvih signala na dijagonali postaju odgovarajući koeficijenti

autokorelacije, a na drugim mjestima odgv. koeficijenti kroskorelacije. Dijagonalizacijom kovarijancijske matrice postizemo dekoreliranost signala.

Neka je  $\mathbf{X}$   $n$ -dimenzionalni vektor pomiješanih signala sa srednjom vrijednosti nula. Tražimo kvadratnu matricu  $\mathbf{P}$ , dimenzija  $n \times n$ , tako da vrijedi:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{P}^T \mathbf{X},$$

uz uvjet da je  $\text{cov}(\mathbf{Z})$  dijagonalna matrica i  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ .

Slijedi:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{Z}) &= E[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T] \\ &= E[(\mathbf{P}^T \mathbf{X})(\mathbf{P}^T \mathbf{X})^T] \\ &= E[(\mathbf{P}^T \mathbf{X})(\mathbf{X}^T \mathbf{P})] \\ &= \mathbf{P}^T E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] \mathbf{P} \\ &= \mathbf{P}^T \text{cov}(\mathbf{X}) \mathbf{P} \end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \text{cov}(\mathbf{Z}) &= \mathbf{P} \mathbf{P}^T \text{cov}(\mathbf{X}) \mathbf{P} \\ &= \text{cov}(\mathbf{X}) \mathbf{P} \end{aligned}$$

Nakon što smo raspisali izraz za  $\text{cov}(\mathbf{Z})$  i dobili:

$$\mathbf{P} \text{cov}(\mathbf{Z}) = \text{cov}(\mathbf{X}) \mathbf{P}$$

a matrica  $\mathbf{P}$  je po pretpostavci dijagonalna, možemo promijeniti redosljed množenja matrica nakon čega slijedi:

$$\text{cov}(\mathbf{X}) \mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{Z}) \mathbf{P}$$

gdje je  $\text{cov}(\mathbf{Z})$  dijagonalna matrica čiji su elementi na dijagonali  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ :

Ako matricu  $\mathbf{P}$  napišemo na sljedeći način:

$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_i, \dots, \mathbf{P}_n]$ , gdje su  $\mathbf{P}_i$  stupci tražene matrice  $\mathbf{P}$  gornja relacija prelazi u:

$$[\lambda_1 \mathbf{P}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{P}_n] = [\text{cov}(\mathbf{X}) \mathbf{P}_1, \dots, \text{cov}(\mathbf{X}) \mathbf{P}_n]$$

Tj, vrijedi,  $\text{cov}(\mathbf{X}) \mathbf{P}_i = \lambda_i \mathbf{P}_i$

Iz gornjeg izraza očito je da su  $\mathbf{P}_i$  odnosno stupci tražene matrice  $\mathbf{P}$  svojstveni vektori matrice  $\text{cov}(\mathbf{X})$ , dok su  $\lambda_i$  njene svojstvene vrijednosti.

Zbog toga pronalaženjem svojstvenih vektora matrice  $\text{cov}(\mathbf{X})$ , pronalazimo matricu  $\mathbf{P}$  koja zadovoljava početni uvjet.

#### 4. Osnove ICA

ICA se temelji na statistici višeg reda

ICA je uspješno primjenjiva kad su zadovoljene sljedeće pretpostavke, na kojima je bazirana:

- Statistička nezavisnost izvora
- Najviše jedan izvor smije imati Gassovu distribuciju
- Matrica miješanja  $\mathbf{A}$  je kvadratna i nesingularna, različita od jedinične matrice

JadeR implementacija ICA-e zahtijeva da broj izvora ne premašuje broj mješavina.

Statistika višeg reda koja se koristi u ICA metodi, najjednostavnije se prikazuje uz korištenje tzv. kumulanta (engl. *cummulants*).

Za moment r-tog reda vrijedi:

$$M_r(z) = E [z^r]$$

Slično definiramo i kros-moment:

$$M_{rp}(z_1, z_2) = E [z_1^r z_2^p]$$

Sada definiramo prvu karakterističnu funkciju:

$$\Psi_z(\omega) = E[e^{j\omega z}]$$

Momente slučajnog procesa možemo pisati i kao:

$$E[z^n] = \frac{1}{j^n} \left[ \frac{d^n \Psi_z(\omega)}{d\omega^n} \right] \text{ za } \omega = 0.$$

Druga karakteristična funkcija slučajnog procesa  $z$  definirana je kao:

$$K_z(\omega) = \ln \Psi_z(\omega)$$

Kada raspišemo  $K_z(\omega)$  dobijemo:

Korištenje wavelet paketa za rješenje problema slijepe separacije 1-D signala i slika

$$K_z(\omega) = C_1(z)(j\omega) + C_2(z) \frac{(j\omega)^2}{2!} + \dots + C_n(z) \frac{(j\omega)^n}{n!}$$

gdje su  $C_1, \dots, C_n$  tzv. kumulanti.

Dakle,

$$C_n(z) = \frac{1}{j^n} \left[ \frac{d^n K_z(\omega)}{d\omega^n} \right] \text{ za } \omega = 0.$$

Za ICA metodu koriste se tzv. kumulanti drugog i četvrtog reda. Uz pretpostavku srednje vrijednosti nula kumulanti drugog i četvrtog reda iskazani preko momenata glase:

$$C_2(z) = E[z^2]$$

$$C_4(z) = E[z^4] - 3E^2[z^2]$$

Razlog zbog kojeg se koriste upravo oni, a ne momenti leži u tome što se pomoću njih lakše izvode računске operacije, korisno svojstvo je što je tzv. kumulant sume jednak sumi kumulanta, zatim, tzv. kros-kumulant nezavisnog slučajnog procesa je nula, što ne vrijedi za momente, itd. Dakle, nezavisnost višeg reda nezavisnih varijabli lakše je provjeriti na ovaj način.

Nezavisnost se mjeri sljedećom formulom:

$$\bar{C}_{pr}(x_i, x_j) = \frac{C_{pr}(x_i, x_j)}{(E[x_i^2])^{\frac{p}{2}} (E[x_j^2])^{\frac{r}{2}}}$$

Korištenje wavelet paketa za rješenje problema slijepe separacije 1-D signala i slika



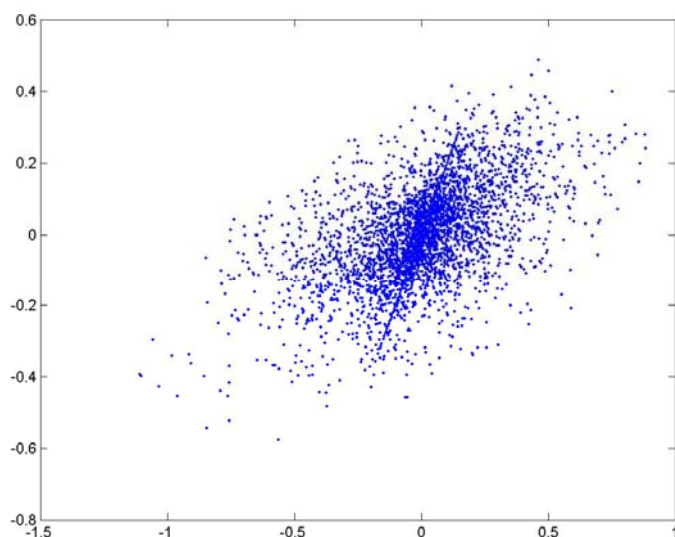
gdje je za  $p, r = 1$ , funkcija normalizirana kroskorelacija, a za  $p, r \in \{1, 2, 3\}$  i  $p+r=4$  normalizirani kros-kumulant četvrtoeg reda.

## Pristup rješenju problema i rezultati

### 1. Eksperiment sa 1-D (audio) signalom

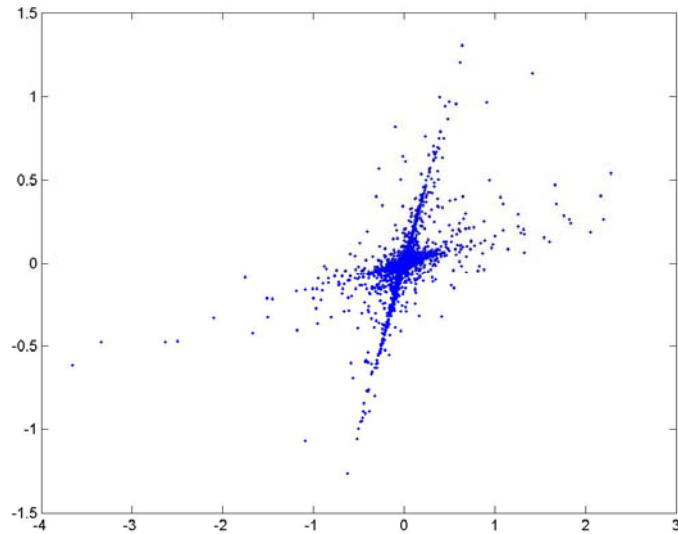
Analizira se slučaj 2 izvora i 2 senzora. Izvori su dobiveni dohvaćanjem dvaju signala u *wav* formatu, zatim su procesirani *downsamplingom*.

Uzorci u prostoru mješavina prikazani su na slici 1. Orijehtacije grupa uzoraka u prikazu teško su vidljive.



**Slika 1:** Uzorci u prostoru mješavina, vremenska domena

Razlaganjem mješavina u potpuno WP drvo dobiva se prikaz sa izraženim orijentacijama uzoraka. Orijehtacije se sijeku blizu ishodišta jer je srednja vrijednost izvora blizu nule.



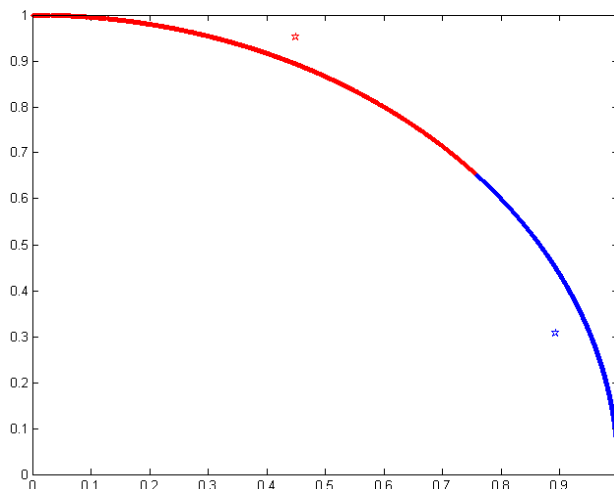
**Slika 2:** Koeficijenti u prostoru mješavina, potpuno WP drvo

Dalje je opisan geometrijski pristup slijepoj separaciji izvora.

Budući da su od interesa samo smjerovi orijentacija grupa koeficijenata u prostoru mješavina, koeficijenti se projiciraju na jediničnu hipersferu djeljenjem sa vlastitom normom. Za slučaj dviju mješavina jedinična hipersfera postaje jedinična kružnica. Zbog simetrije problema (centralne oko ishodišta) jednostavnije je promatrati apsolutne vrijednosti projiciranih koeficijenata; inače, dobilo bi se više *clustera* u sljedećem koraku.

Radi pronalaženja gomilišta projekcija na jediničnoj hipersferi, radi se neka od *clustering* metoda. Ovdje je nad projekcijama rađen *c-means clustering*, uz pretpostavku 2 *clustera*. U praksi je taj podatak (broj izvora) nepoznat. Međutim, može ga se procijeniti algoritmima temeljenim na Hartmanovoj statistici ili pomoću PCA.

Na slici 3. različitim bojama obojeni su projicirani koeficijenti koji pripadaju različitim *clusterima* sa centroidima označenim pentagramima u odgovarajućim bojama.



**Slika 3:** Projicirani koeficijenti nakon *clusteringa* sa odgovarajućim centroidima

Upisivanjem koordinata centroida po stupcima u matricu dobivamo estimiranu matricu miješanja.

centroids =

0.4502	0.8930
0.9513	0.3084

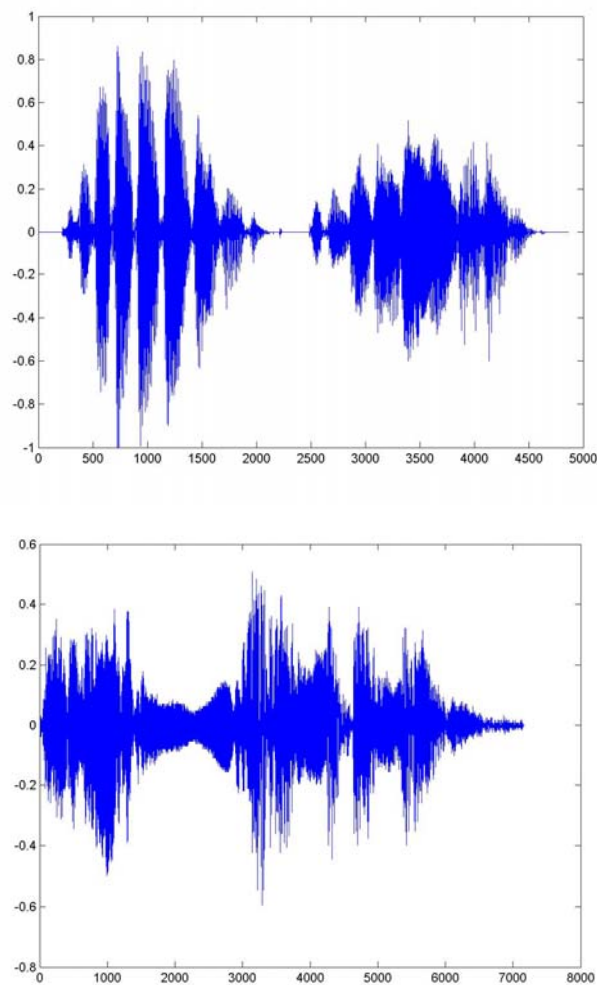
AArec =

0.4502	0.9513
0.8930	0.3084

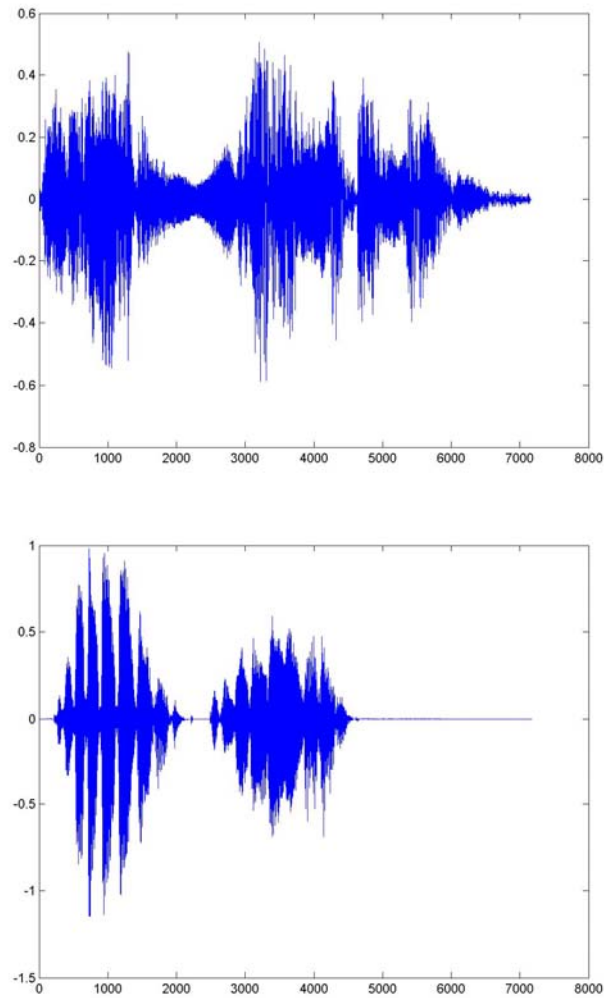
Jednostavnim traženjem inverza estimirane matrice miješanja i množenjem dobivaju se estimirani izvori, prikazani na slici 5.

Za usporedbu, na slici 4. prikazani su izvori. Također, poznata je i matrica miješanja, koja glasi:

AA =

$$\begin{pmatrix} 0.9877 & 0.4540 \\ 0.1564 & 0.8910 \end{pmatrix}$$


Slika 4: Izvori

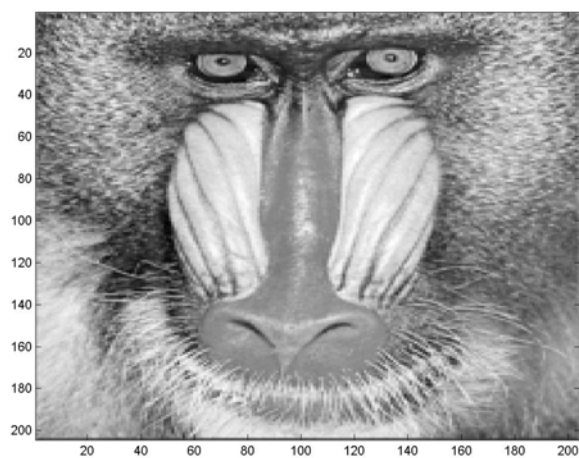


**Slika 5:** Estimirani izvori

Vidi se da su kroz estimaciju izgubljene informacije o redosljedu izvora i skali amplitude; analogno je kod ICA, koja daje estimaciju uz permutaciju i multiplikativnu konstantu.

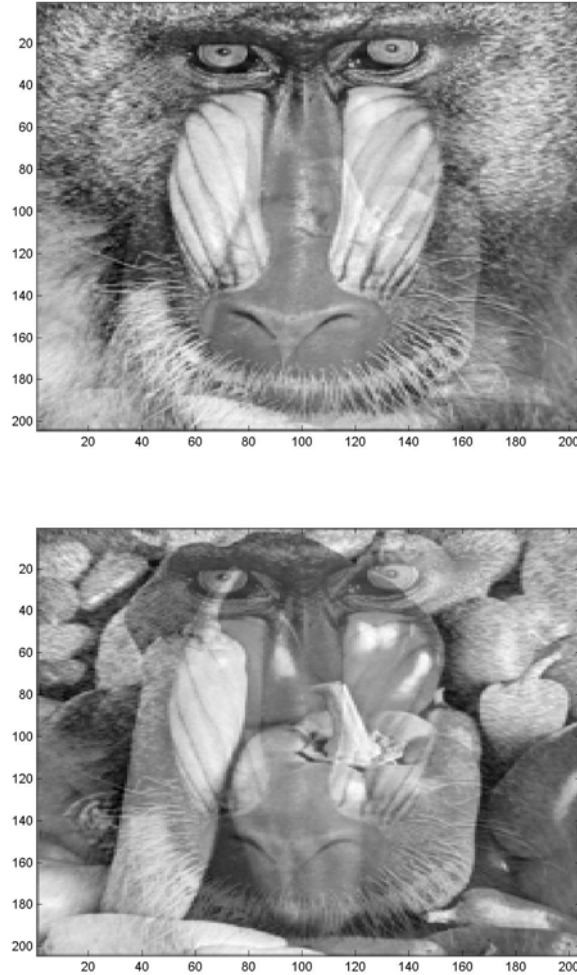
## 2. Eksperiment sa 2D signalom (slikom), broj izvora jednak broju senzora

Analizira se slučaj 2 izvora i 2 senzora. Izvori predstavljaju *grayscale* slike sa uklonjenom srednjom vrijednosti. Prikazane su na slici 6.



Slika 6: Izvori

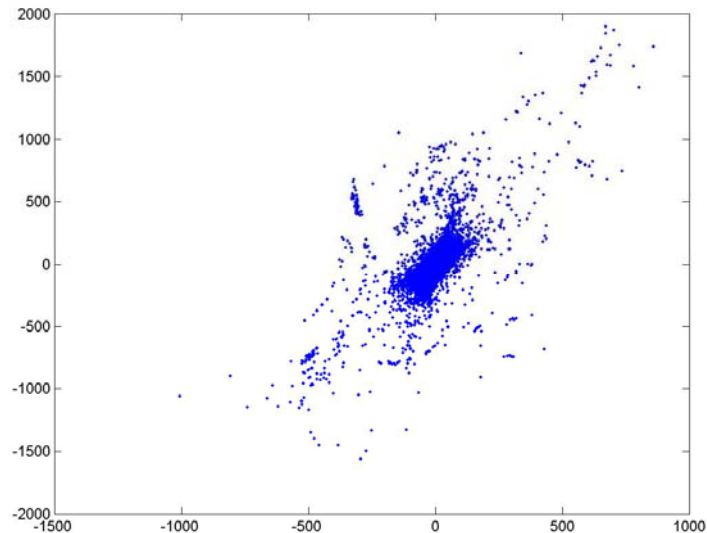
Mješavine su dobivene linearnim miješanjem pomoću pseudoslučajno generirane matrice miješanja, prikazane su na slici 7.



**Slika 7:** Mješavine



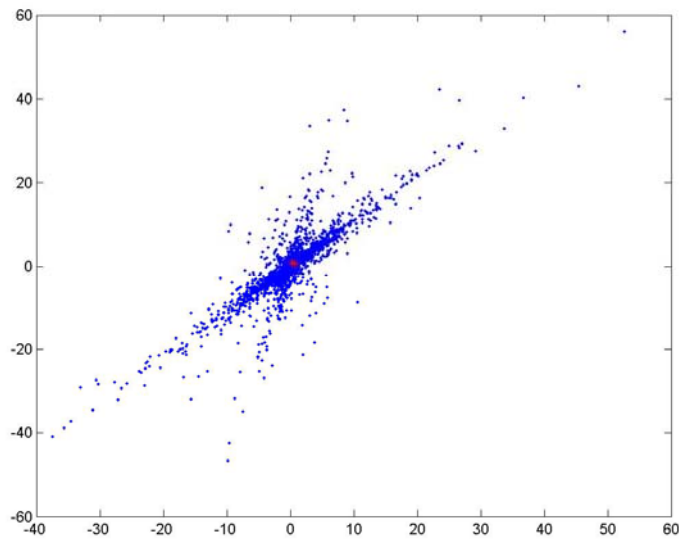
Mješavine se zatim reprezentiraju *Wavelet* paketima. Sa terminalnim čvorovima u posljednjoj razini razlaganja, koeficijenti u prostoru mješavina prikazani su na slici 8.



**Slika 8:** Svi koeficijenti, prostor mješavina

Orijentacije nisu jasno razdvojene. Zbog toga se traže najrjeđi WP koeficijenti i u prostoru mješavina prikaže se nekolicina njih. Naravno, pri tome se dobije reprezentacija samo dijela signala, no time ne gubimo informaciju jer izvore ne rekonstruiramo iz WP koeficijenata, već preko matrice miješanja.

Kao mjera rijetkosti korištena je ukupna srednja vrijednost euklidske udaljenosti svake točke (projekcije) iz *cluster*a do pripadajućeg centroida. Alternativno, može se koristiti i srednji kut odstupanja projekcije koeficijenta od projekcije pripadajućeg centroida na jediničnu hipersferu. Najprije se izračuna mjera rijetkosti za svaki od čvorova WP drva, a potom se u prostoru mješavina uzme nekolicina njih koji se pokazuju najrjeđima. Tako je dobivena slika 9., sa vizualno razlučenim orijentacijama prikaza.



**Slika 9:** Koeficijenti u prostoru mješavina, 3 čvora

Geometrijska metoda nad koeficijentima iz tako odabranih čvorova daje rekonstruiranu matricu miješanja

$AArec\_geom =$

0.2575 0.7150

0.9663 0.6991

i rekonstruirane izvore sa slike 10.



**Slika 10:** Rekonstruirani izvori, geometrijska metoda

JADE implementacija ICA algoritma nad koeficijentima tako odabranih čvorova daje inverz estimirane matrice miješanja

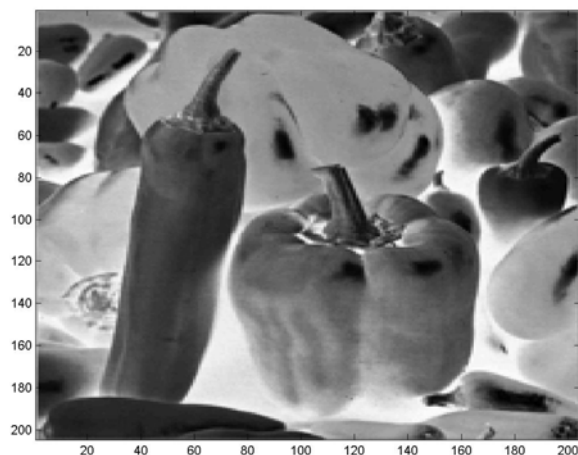
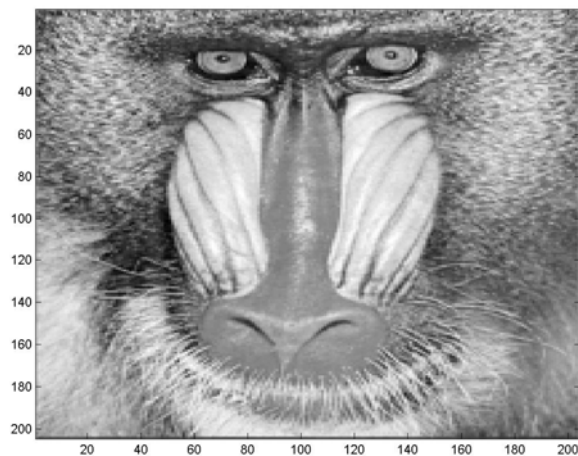
$\text{invAArec\_JADE} =$

0.1908 -0.0299

0.2465 -0.2349

i estimirane izvore sa slike 11.

Korištenje wavelet paketa za rješenje problema slijepe separacije 1-D signala i slika



**Slika 11:** Estimirani izvori, JADE

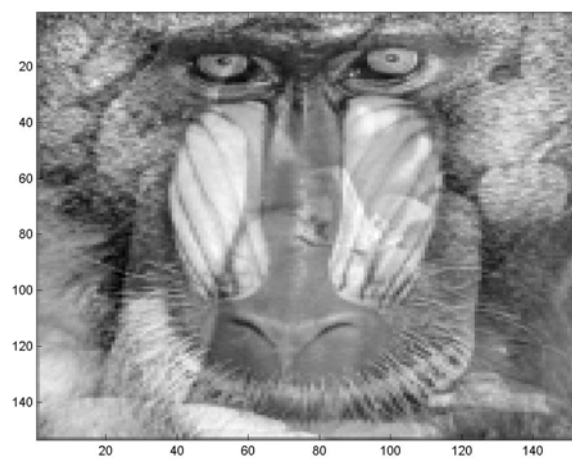
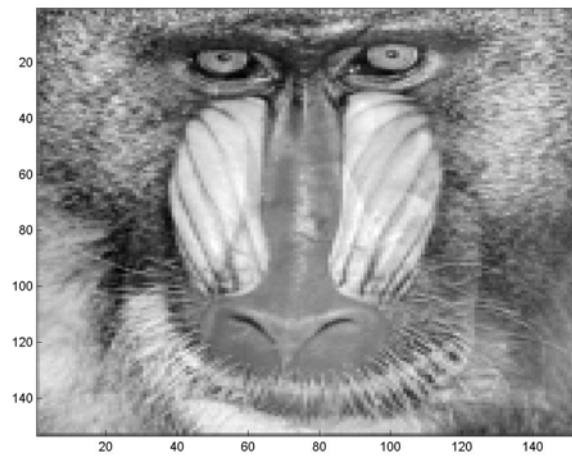
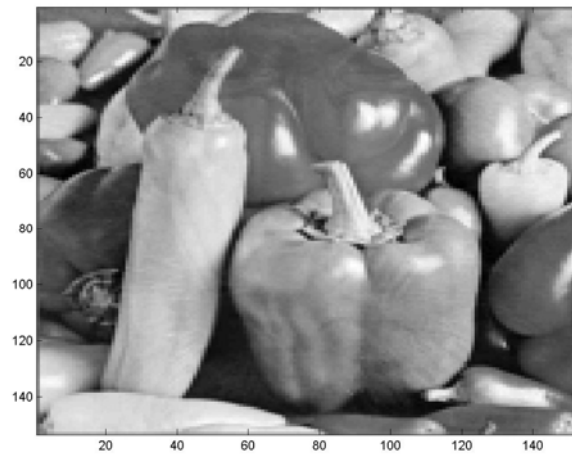
Drugi izvor sa slike 11. praktički je negativ odgovarajućeg izvora jer JADE algoritam tretira kutove orijentacija  $\theta$  i  $\theta+180^\circ$  kao jednakovrijedne. U ovom slučaju dobiva se rotacija odgovarajuće orijentacije za  $180^\circ$  više (odn. manje) nego kod geometrijske metode. Upravo zato, da bi se izbjegao taj fenomen u geometrijskoj metodi, promatramo apsolutne vrijednosti projekcija koeficijenata.

### **3. Eksperiment sa 2D signalom (slikom), broj izvora manji od broja senzora**

Analizira se slučaj 2 izvora i 3 senzora. Izvori su slike sa slike 6. Mješavine su prikazane na slici 7.

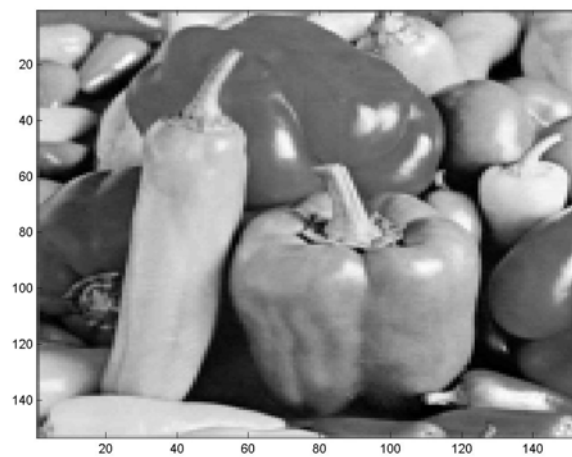
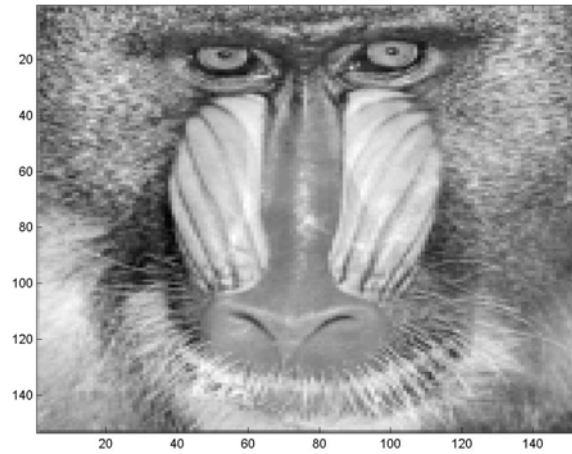
Rezultati su usporedivi s onima iz prethodnog eksperimenta. Nalaze se na slikama 12. i 13., dobiveni redom geometrijskom metodom i JADE-om.

Postupak estimiranja matrice jednak je kao u prošlom eksperimentu. Budući da matrica miješanja nije kvadratna, ne postoji njen inverz, umjesto kojeg se koristi Moore-Penrose pseudoinverz. Pseudoinverz nije jedinstveno rješenje.

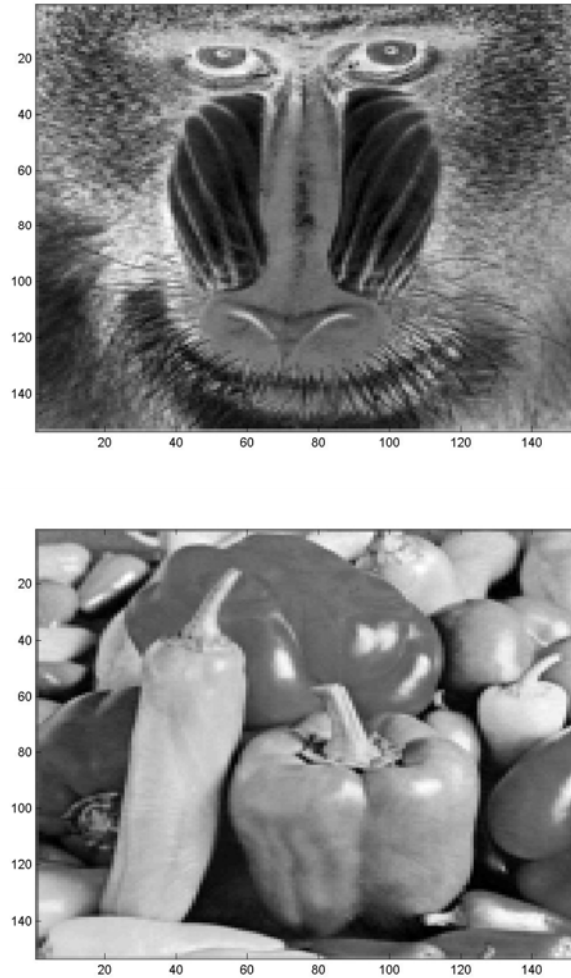


**Slika 12:** Mješavine

Korištenje wavelet paketa za rješenje problema slijepe separacije 1-D signala i slika



**Slika 13:** Estimirani izvori, geometrijski algoritam



**Slika 13:** Estimirani izvori, JADE

#### **4. Eksperiment sa 2D signalom (slikom), broj izvora veći od broja senzora**

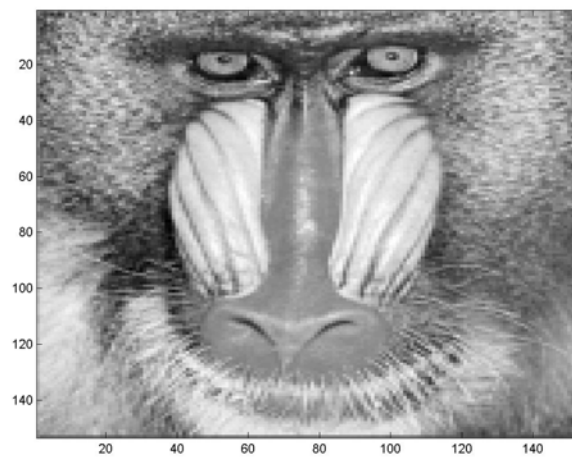
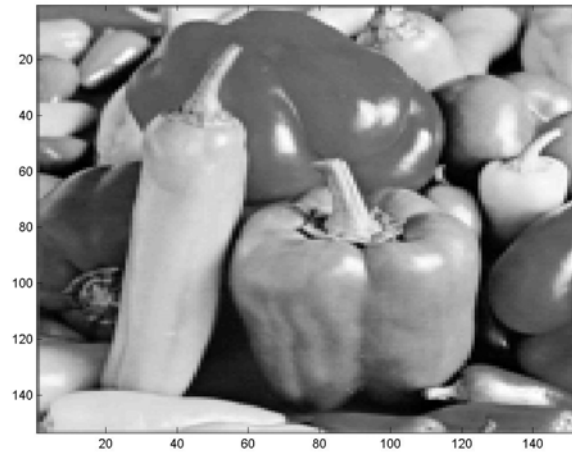
Budući da JADE ne može procesirati slučaj kada je broj izvora veći od broja senzora, koristi se geometrijska metoda određivanja orijentacija. Iako ih nije moguće separirati, ovdje je pokušana rekonstrukcija iz WP koeficijenata.

Najprije se pronadu orijentacije iz koeficijenata nekoliko čvorova koji su se pokazali kao najrjeđi. Zatim se svaki izvor rastavi na potpuno WP drvo. Time je osigurana potpuna rekonstrukcija mješavine, a rijetkost pojedinih WP koeficijenata je



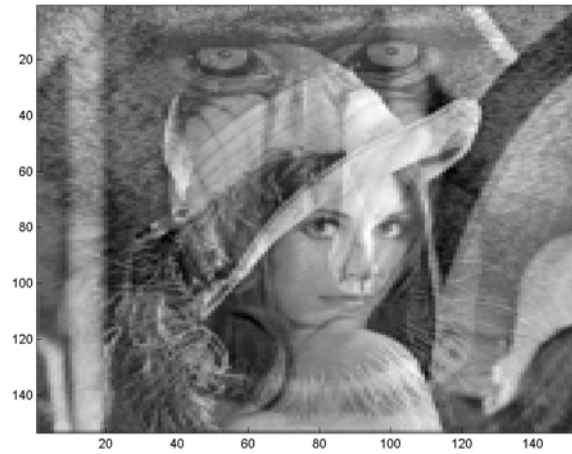
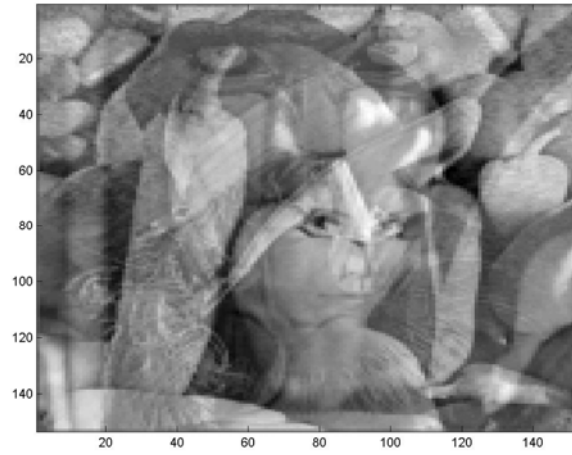
zadovoljavajuća. Dalje je za svaki čvor potrebno formirati grupacije koeficijenata u prostoru stanja na način da se svakom koeficijentu pridruži centroid tj. orijentacija, uz uvjet da je odstupanje (euklidska udaljenost) od pripadnog centroida minimalno. Iz prve mješavine zadrže se koeficijenti koji pripadaju pojedinom centroidu, drugim riječima pojedinom izvoru, a ostali se stave u 0. Tako obrađeni WP koeficijenti upišu se u prazno WP drvo. Nakon upisa, WP drvo potpuno je. Postupak se ponovi na istoj mješavini, ali za drugu orijentaciju te se kao rezultat dobiva novo WP drvo. Na kraju WP drva ima koliko izvora. Izvori se estimiraju rekonstrukcijom iz dobivenih WP drva.

Na slici 16. prikazani su rezultati primjene takvog postupka. Naziru se samo obrisi.

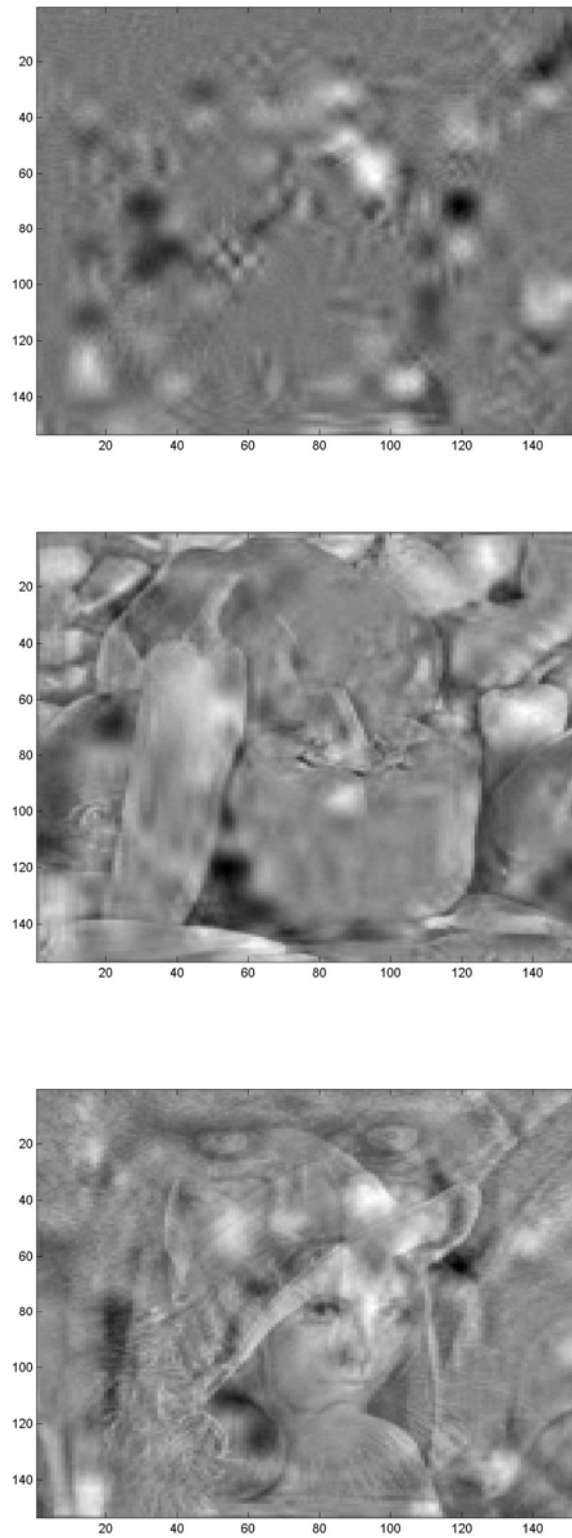


**Slika 14:** Izvori

Korištenje wavelet paketa za rješenje problema slijepe separacije 1-D signala i slika



**Slika 15: Mješavine**



**Slika 16:** Pokušaj razdvajanja

Korištenje wavelet paketa za rješenje problema slijepe separacije 1-D signala i slika

## **Zaključak**

Prikazani su postupci, geometrijski i PCA/ICA, slijepe separacije signala na primjerima audio signala i slika uz odsutnost šuma. Separacija je rađena na signalima reprezentiranim *Wavelet* paketima. Ukratko je izložena i teorijska podloga na kojoj se ti postupci temelje.