

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Transmultiplekser

Projektni zadatak iz kolegija Napredne metode
digitalne obrade signala

Ivan Štimac
Tomislav Kamenarić

Zagreb, siječanj 2006.

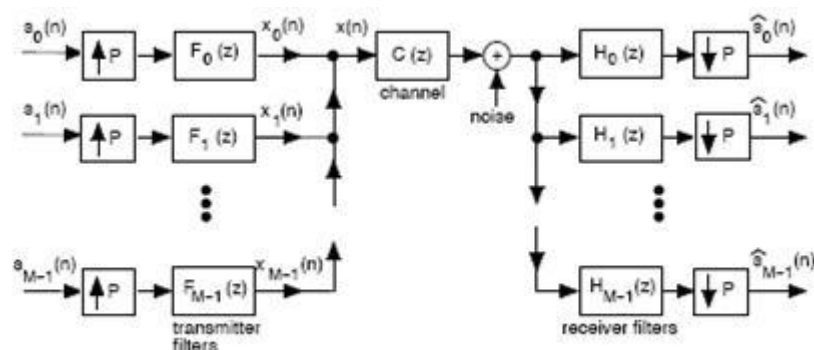
Sadržaj

Sadržaj.....	2
Opis transmultipleksera.....	3
Eliminiranje interblock interference.....	5
Poništavanje multiuser interference	8
Reference.....	11

Opis transmupleksera

Po definiciji transmuplekser pretvara vremenski multipleksirane komponente signala u frekvencijski multipleksirane i obrnuto. Osnovna shema je prikazana na slici 1. Transmuplekser se isto tako koristi u aplikacijama kao što su kompenziranje kanala i identifikacija kanala. Filtarski slogovi i transmuplekser su dualni jedan drugome. Iskorištavajući to njihovo svojstvo, na predajnoj strani, M različitih signala je multipleksirano u jedan prijenosni signal pomoću interpolatora i rekonstrukcijskih filtara. Na prijemnoj strani dolazni signal je rastavljen na M signala koristeći analizirajuće filtre i decimatore. Kako se može i pretpostaviti, zbog ne idealnih filtra dolazi do preslušavanja između kanala, ali pošto su analizirajući filtri obrnuti rekonstrukcijskim to preslušavanje se poništava.

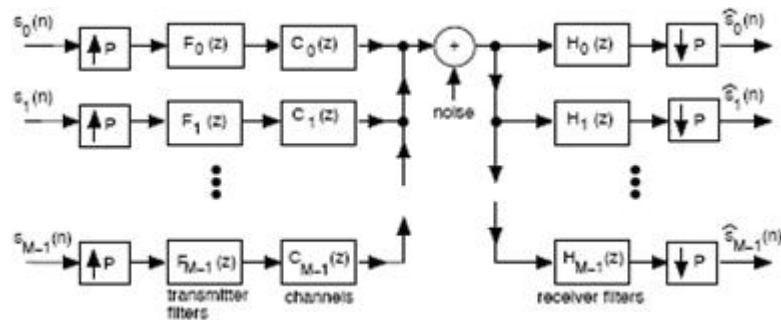
Primijetite da kada je M signala multipleksirano u jedan kanal, potrebno je imati $P \geq M$. Kada imamo slučaj $P > M$ imamo redundantni transmuplekser, a kada imamo slučaj $P = M$ sustav se naziva minimalni transmuplekser.



Slika 1- Transmuplekser s M ulaza

Primljeni signali $\hat{s}_k(n)$ su generalno različiti od $s_k(n)$ zbog nekoliko razloga. Prvi je multiuser interference (MUI). To znači da $\hat{s}_k(n)$ ne sačinjava samo $s_k(n)$ nego i od $s_m(n), m \neq k$. Drugi je, kanal $C(z)$ uzrokuje linearnu distorziju koja se naziva intersymbol interference (ISI) i na kraju tu je i aditivni šum. Zadatak prijemnog dijela je minimizirati efekte distorzije tako da se simboli koje smo poslali $s_k(n)$ mogu rekonstruirati iz izlaznog signala $\hat{s}_k(n)$ s prihvatljivom razine pogreške. Kada nema šuma moguće je kompenzirati efekte kanala u potpunosti i zadržati svojstvo potpune rekonstrukcije kojom dobijamo $\hat{s}_k(n) = s_k(n)$. Slučaj kada imamo $P > M$ korisniji je od slučaja kada imamo $P = M$ jer je tada

moгуće riješiti neke probleme uzrokovane realnom izvedbom filtara. Na primjer kada imamo $P > M$ moguće je kompenzirati FIR kanal samo koristeći FIR filtre $H_k(z)$ i $F_m(z)$.



Slika 2 – Poopćavanje transmultipleksera sa M ulaza

Specijalna izvedba redundantnih transmultipleksera koristi se kod DSL sustava u njihovoj prijemnoj strani. Kod ovih sustava filtri su izabrani kao dio DFT filtarskih banaka. Koristeći polifaznu reprezentaciju dolazimo do činjenice da kada stavimo vremenski neovisan (LTI) filtar $G(z)$ između interpolatora i decimatora kao što je prikazano na slici 3 tada je rezultat ekvivalentan LTI sustavu koji ima impulsi odziv $d(n) = g(Pn)$ (decimirana verzija).



Slika 3- Polifazna reprezentacija

Prijenosna funkcija cijelog sustava glasi $D(z) = |G(z)| \downarrow P$. Prijenosna funkcija sustava na slici 2 glasi :

$$T_{km}(z) = [H_k(z)C_m(z)F_m(z)] \downarrow P \quad (1)$$

Ako izaberemo filtre $\{F_m(z)\}$ i $\{H_k(z)\}$ tako da vrijedi

$$[H_k(z)C_m(z)F_m(z)] \downarrow P = \delta(k - m) \quad (2)$$

Tada je poništena multiuser interference i uvjeti za potpunu rekonstrukciju su dani.

Moguće je zadovoljiti drugu jednadžbu i kada je $P=M$. Kada je $G_m^\Delta = C_m(z)F_m(z)$, filtri

$\{H_k(z)\}$ i $\{G_m(z)\}$ su biortogonalni. Ipak kada je kanal $C_m(z)$ poznat i predstavljen kao FIR moguće je da nema FIR rješenja ili stabilnih IIR rješenja kojima se mogu prikazati filtri $H_k(z)$ i $F_m(z)$, a da zadovoljavaju (2). Na primjer kada je $P=M=1$ jednažba (2) glasi $H(z)C(z)F(z) = 1$ i nemoguće ju je zadovoljiti ako su sve tri funkcije FIR.

Ako dopustimo slučaj da je interpolacijski faktor $P > M$ tada imamo mnogo pogodnosti. Za primjer uzmimo da je kanal FIR:

$$C_m(z) = \sum_{n=0}^L c_m(n)z^{-n}$$

Ako pak uzmemo faktor interpolacije $P \geq M+L$ moguće je na lukav način doći do potpune rekonstrukcije s FIR filtrima $H_k(z)$ i $F_m(z)$.

Eliminiranje interblock interference

Na slici 4 prikazan je m-ti predajnik i k-ti primaoc nacrtani u polifaznoj formi

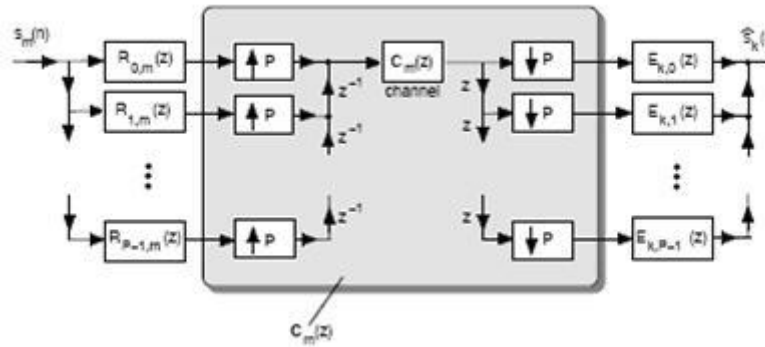
$$F_m(z) = \sum_{i=0}^{P-1} z^{-i} R_{i,m}(z^P), \quad H_k(z) = \sum_{i=0}^{P-1} z^i E_{k,i}(z^P) \quad (4)$$

Kada je šum zanemaren put između m-tog predajnika i k-tog primaoca može se opisati pomoću matrice $C_m(z)$ čiji su elementi $|C_m(z)|_{l,i} = [z^{l-i} C_m(z)] \downarrow P$.

Za primjer uzmimo slučaj kada imamo zadane vrijednosti $L=2$ i $P=5$, tada matrica $C_m(z)$ izgleda kao

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & P-L & & & L \\ c_m(0) & 0 & 0 & z^{-1}c_m(2) & z^{-1}c_m(1) \\ c_m(1) & c_m(0) & 0 & 0 & z^{-1}c_m(2) \\ c_m(2) & c_m(1) & c_m(0) & 0 & 0 \\ 0 & c_m(2) & c_m(1) & c_m(0) & 0 \\ 0 & 0 & c_m(2) & c_m(1) & c_m(0) \end{array} \right)$$

Ovakav prikaz se naziva blok verzija $C_m(z)$ -a.



Slika 4 – m-ti predajnik i k-ti primaoc u polifaznoj formi

Prethodna matrica se naziva pseudocirkularna. Prvih $P-L$ stupaca ima konstantne elemente, a drugih L stupaca ima z^{-1} uz neke elemente. Slično prethodnom slučaju zadnjih $P-L$ redova ima konstantne elemente. Prema tome blok matrica se može podijeliti na dva dijela:

$$\mathbf{C}_m(z) = P \begin{pmatrix} P-L & L \\ \mathbf{A}_m & \mathbf{B}(z) \end{pmatrix} = \begin{matrix} L \\ P-L \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}(z) \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (5)$$

\mathbf{A}_m matrica ima dimenzije $P \times (P-L)$, a \mathbf{D} je matrica je dimenzija $(P-L) \times P$ (obje su konstantne Toeplitzove matrice). Prijenosna funkcija sustava na slici 4 glasi:

$$[E_{k,0}(z) \ E_{k,1}(z) \ \dots \ E_{k,P-1}(z)] \mathbf{C}_m(z) \begin{bmatrix} R_{0,m}(z) \\ R_{1,m}(z) \\ \vdots \\ R_{P-1,m}(z) \end{bmatrix}$$

Koristeći jednadžbu (5) prijenosnu funkciju možemo zapisati u dva oblika. Kao

$$[E_{k,0}(z) \ E_{k,1}(z) \ \dots \ E_{k,P-1}(z)] \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{B}(z) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R_{0,m}(z) \\ R_{1,m}(z) \\ \vdots \\ R_{P-1,m}(z) \end{bmatrix}$$

Ili kao

$$[E_{k,0}(z) \ E_{k,1}(z) \ \dots \ E_{k,P-1}(z)] \begin{pmatrix} \mathbf{C}(z) \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R_{0,m}(z) \\ R_{1,m}(z) \\ \vdots \\ R_{P-1,m}(z) \end{bmatrix}$$

Pošto $\mathbf{B}(z)$ i $\mathbf{C}(z)$ imaju u sebi z^{-1} , one predstavljaju međudjelovanje između ulaznih vektora koji se pojavljuju u različita vremena na ulazu od $\mathbf{C}_m(z)$. Ova pojava se naziva inter-block

interference ili IBI, koju je poželjno eliminirati. Biti će pokazana dva načina konstrukcije filatara kako bi IBI bio eliminiran.

1. Zero-padding. Ovdje se eliminira $B(z)$ tako da se namjesti

$$R_{P-L,m}(z) = \dots = R_{P-1,m}(z) = 0$$

To postizemo umetanjem bloka od L nula na kraj svakog bloka od $P-L$ simbola (slika 5a).

2. Zero-jamming. Kod ove metode se eliminira $C(z)$ tako da se izabere

$$E_{k,0}(z) = \dots = E_{k,L-1}(z) = 0.$$

To jest zamijenimo blok od L uzoraka s nulama, kod svakog bloka dužine P uspješno primljenih simbola (slika 5b).

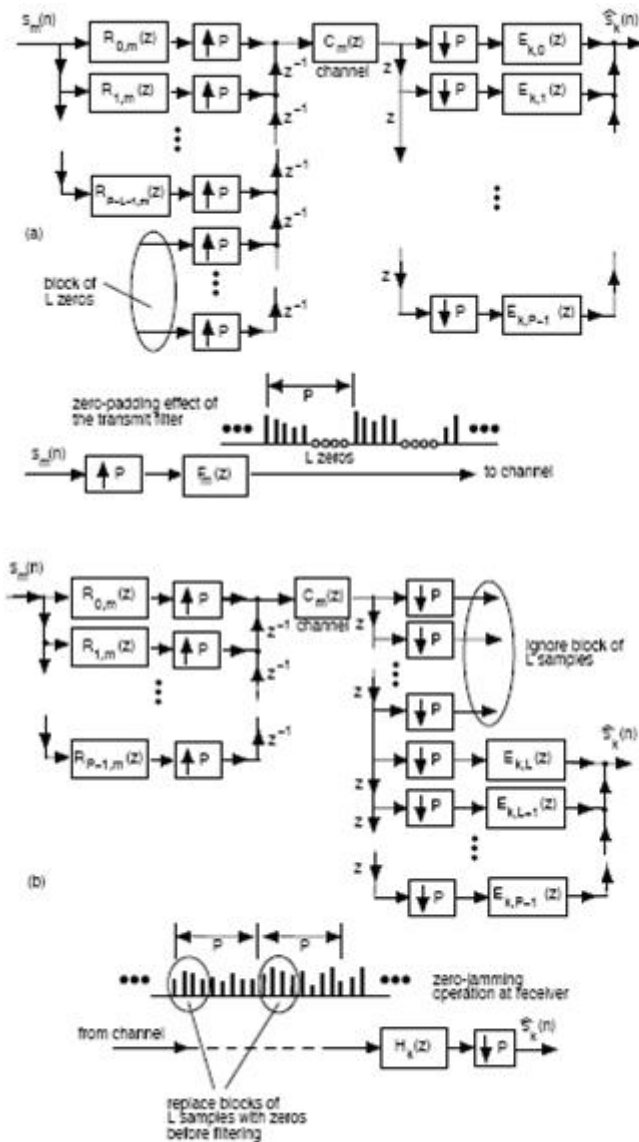
Daljnje razmatranje se odnosi na zero-padding metodu. Transfer funkcija cijelog sustava kod ove metode je dana kao:

$$[E_{k,0}(z) \ E_{k,1}(z) \ \dots \ E_{k,P-1}(z)] A_m \begin{bmatrix} R_{0,m}(z) \\ R_{1,m}(z) \\ \vdots \\ R_{P-L-1,m}(z) \end{bmatrix} \quad (6)$$

, gdje je $P \times (P-L)$ matrica A_m oblika

$$A_m = \begin{bmatrix} c_m(0) & 0 & \dots & 0 \\ c_m(1) & c_m(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m(L) & & & \\ 0 & c_m(L) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_m(L) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ona u potpunosti opisuje efekte m -tog kanala.



Slika 5 – Prikaz metoda kojima se poništava interblock interference

Poništavanje multiuser interference

Matrica A_m je Toeplitzova matrica. Zbog toga ima jedno dobro svojstvo: dodajući bilo koji broj ρ_k različit od nula matrica zadovoljava jednadžbu

$$[1 \ \rho_k^{-1} \ \dots \ \rho_k^{-(P-1)}] A_m = C_m(\rho_k) [1 \ \rho_k^{-1} \ \dots \ \rho_k^{-(P-L-1)}] \quad (8)$$

gdje je $C_m(z) = \sum_n c_m(n) z^{-n}$.

Mi iskoristavamo ovo svojstvo kod biranja filtera i pokazujemo kako MUI može biti poništen.

Biramo sljedeće filtre:

$$H_k(z) = a_k(1 + \rho_k^{-1}z + \rho_k^{-2}z^2 + \dots + \rho_k^{-(P-1)}z^{(P-1)}) \quad (9)$$

$$F_m(z) = r_{0,m} + r_{1,m}z^{-1} + \dots + r_{P-L-1,m}z^{-(P-L-1)} \quad (10)$$

dok je prijenosna funkcija $T_{km}(z)$ jednadžba (6), a ρ_k su različiti za $0 \leq k \leq M-1$. Koristeći svojstvo (8) jednadžbu (6) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} & a_k [1 \ \rho_k^{-1} \ \dots \ \rho_k^{-(P-1)}] \mathbf{A}_m \begin{bmatrix} r_{0,m} \\ r_{1,m} \\ \vdots \\ r_{P-L-1,m} \end{bmatrix} \\ &= a_k C_m(\rho_k) [1 \ \rho_k^{-1} \ \dots \ \rho_k^{-(P-L-1)}] \begin{bmatrix} r_{0,m} \\ r_{1,m} \\ \vdots \\ r_{P-L-1,m} \end{bmatrix} \\ &= a_k C_m(\rho_k) F_m(\rho_k) \end{aligned}$$

Tako je prijenosna funkcija cijelog sustava oblika

$$T_{km}(z) = a_k C_m(\rho_k) F_m(\rho_k) \quad (11)$$

te je konstantna i nezavisna od z . Pretpostavimo da su koeficijenti a_k birani kao

$$a_k = \frac{1}{C_k(\rho_k)} \quad (12)$$

Tada uvjet za potpunu rekonstrukciju simbola prelazi iz $T_{km}(z) = \delta(k-m)$ u

$$F_m(\rho_k) = \delta(k-m), \quad 0 \leq k, m \leq M-1 \quad (13)$$

Da biramo i svojevrijedno koeficijente ρ_k (samo da su različiti) možemo zadovoljiti uvjet (13) sve dok imamo $F_m(z)$ koji ima m stupnjeva slobode (FIR reda $\geq M-1$). To daje uvjet $P \geq M+L$ koji ćemo mi zamijeniti sa

$$P = M + L \quad (14)$$

Tada prethodni zaključci vrijede sve dok je red kanala $\leq L$. Koeficijenti a_k iz jednadžbe (12) koji su dio prijemnih filtara mogu biti smatrani kompezatorima u z domeni. Ako vrijedi $\rho_k = e^{j\omega k}$ tada oni postaju kompezatori u frekvencijskoj domeni.

Uvjet (13) nam pokazuje da se multiuser interference može poništiti iako je signal nepoznat. Potrebno je samo znati red kanala. Poznavanje kanala potrebno je samo kod dizajna kompezatora (12) za svaki prijemnik. Kako FIR filtri imaju konačan broj nula, uvijek možemo izabrati ρ_k tako da vrijedi $C_k(\rho_k) \neq 0$. Tako da je kompenzacija kanala uvijek moguća!

Primjer

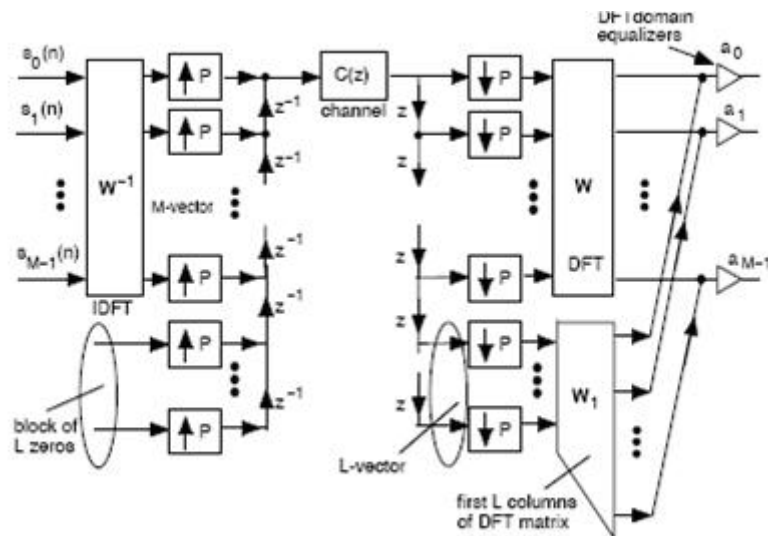
Imamo DFT filtarske banke. Pretpostavimo da glasi $C_m(z) = C(z)$ za sve m-ove, $P=M+L$, i

$$\rho_k = W^{-k}, W \stackrel{\Delta}{=} e^{-j2\pi/M}$$

Tako imamo

$$H_k(z) = \frac{1}{C(W^{-k})} \sum_{n=0}^{P-1} z^n W^{nk} \quad (15)$$

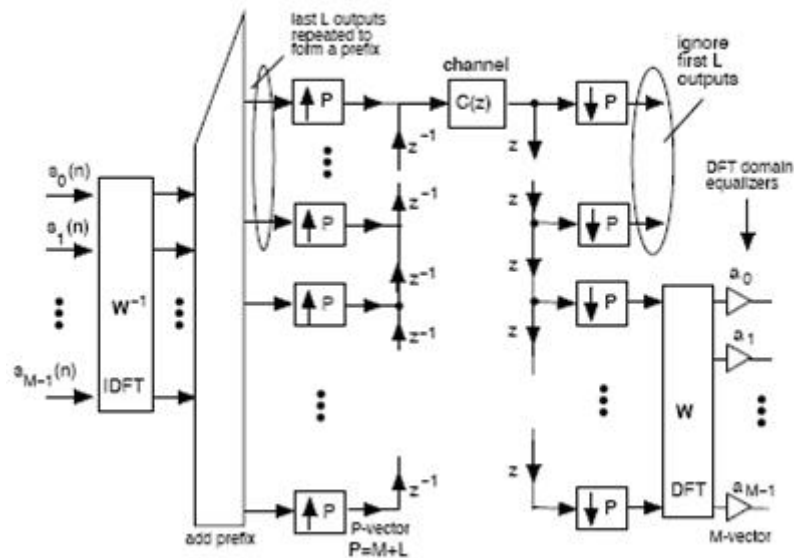
Uvjeti PR (13) daju predajne filtre $F_m(z) = \sum_{n=0}^{M-1} W^{-mn} z^{-n} / M$.



Slika 6 – Zero-padding na predajniku i cyclic prefix ekvilizatori na prijmniku

Kada su na ulazu simboli koji su dio jednog signala sustav se može prikazati slikom 6. gdje je \mathbf{W} DFT matrica dimenzija $M \times M$, a \mathbf{W}_1 je submatrica od \mathbf{W} dobivena zadržavanjem prvih $L=(P-M)$ stupaca. Kompezatori $a_k = 1/C(W^{-k}) = 1/C(e^{j2\pi k/M})$ invertiraju frekvencijski odziv kanala.

Ako započnemo sa zero-jamming metodom umjesto zero-padding metodom moguće je dobiti sličan primjer. Na slici 7 je prikazan cyclic prefix sustav. Cycle prefiks sustav je specijalna izvedba kompezatorskog sustava proučavanog ovdje i stoga ima svojstvo potpune rekonstrukcije u odsutnosti šuma. Naša analiza pokazuje da se kompezatori a_k javljaju kod cyclic prefix sustava jednako kao i kod zero-padding sustava.



Slika 7 – Korištenje Cyclic prefix sustav kod diskretne multitone modulacije

Reference

- [1] P.P. Vaidyanathan and B. Vrcelj, "Transmultiplexers as precoders in modern digital communication: a tutorial review," Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst., pp. 405-412, May 2004
- [2] D.Seršić, Predavanja iz NMDO-a, <http://nmdos.zesoi.fer.hr/index.hr.html>
- [3] A. Mertins, "Memory truncation and crosstalk cancellation in transmultiplexers," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 3, no. 6, pp. 180–182, 1999
- [4] Vaidyanathan, P. P., "Filter banks in digital communications," *IEEE CAS Mag.*, vol. 1, pp. 4–25, 2001.
- [5] E.F. Badran, "Optimal channel equalization for filterbank transceivers in presence of white noise", Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in The Department of Electrical and Computer Engineering