FER, ZESOI

Seminarski rad iz predmeta Napredne metode digitalne obrade signala

Efikasna ljestvičasta realizacija wavelet filtarskih slogova Euklidskim algoritmom

Aljoša Gregov

Zagreb, 2007.

Uvod

Razvojem računalne opreme sposobne za digitalnu obradu signala u realnom vremenu, ljudi su počeli smišljat načine kako da kompleksne sklopove za analognu obradu signala zamijene digitalnima. No s vremenom su i želje korisnika rasle, a s njima i potreba za računalnom moći koja je ipak ograničena tehnologijom i ne može pratiti želje i potrebe. Iz tog razloga su ljudi paralelno s unaprijeđivanjem procesora morali smišljati i pametnije algoritme koji troše manje resurasa za obavljanje potrebnih radnji. U upotrebu su osim «jednostavnih» digitalnih filtera tipa FIR i IIR došli i wavelet filtarski slogovi, čijim korištenjem je moguće postići razne vrste analiza signala pa i kompresiju. Kompresija je poželjna zbog ograničenog memorijskog prostora za pohranjivanje u slučaju realnih signala poput zvuka i videa. Međutim, kako bi bilo moguće kompresiju izvršiti u realnom vremenu, potrebno je moći vršiti wavelet filtarske operacije na signalu također u realnom vremenu, odnosno potrebno je imati adekvatno jaki procesor. Alternativa, koja uvijek «dobro dođe», je smanjiti broj računskih funkcija potrebnih za filtriranje signala. Polifazna realizacija wavelet filtarski slogova sama po sebi smanjuje količinu podataka rastavljanjem ulaznog niz-a na dva podniza, dvije faze, parnu i neparnu. Matematički prikaz ovakvog sustava sadrži matricu polinoma. Realizacija tog istog sustava u praksi, međutim, nije pretjerano efikasna. Dokazano je da se takva matrica može faktorizirati u umnožak jednostavnijih matrica. Tada praktično ostvarenje sustava dobiva posebno jednostavan oblik, koji reducira broj računanja na pola u odnosu na klasično ostvarenje. Takva realizacija poznata je pod imenom ljestvičasta realizacija wavelet filtra ili filtarski slog s podizanjem. Metoda kojom se može efikasno faktorizirati polifaznu matricu poznata je od pradavnih vremena, a zove se Euklidov algoritam za pronalaženje najvećeg zajedničkog djelitelja.

Što je ljestvičasta realizacija

Osnovna ideja waveleta je iskoristiti korelacijske odnose unutar realnih signala, kojima se koristimo u stavrnom životu, te onda transformirati signal u oblik koji ima samo najnužnije ali ipak sve potrebne informacije za rekonstrukciju. Konstrukcija takvog waveleta moguća je u frekvencijskoj domeni, upotrebom Fourierove transformacije, ali i u prostornoj domeni. Štoviše, koristeći pristup u prostornoj domeni, moguće je postići neka svojstva, koja su neostvariva s Fourierovom transformacijom. Moguće je naime koristiti i nelinearne funkcije, pa i vremenski promjenjive, a da filtarski slog bude s potpunom rekonstrukcijom. Jedan od pristupa gradnji waveleta u prostornoj domeni bit će prikazan. Ako ulazni signal rastavimo u dva podniza, parnu (x_p) i neparnu (x_n) fazu, ta dva niza imaju veliku kroskorelaciju. Moguće je dakle iz jednog predvidjeti članove onog drugog, odnosno možemo sagraditi prediktor P. Kako prediktor nije savršen postojat će neka razlika d.

Tada vrijedi

$$d=x_p - P(x_n)$$

Prema tome je moguće obnoviti parnu fazu jednostavnim postupkom zbrajanja:

$$x_p = d + P(x_n)$$

U slučaju dobrog prediktora P, niz d će imati manju entropiju nego x_n . Operacija računanja predikcije i zapisivanja razlike d zove se korak podizanja. Vidjeli smo da niz d ima bolja svojstva nego niz x_n , međutim isto ne važi i za niz x_p koji je poduzorkovan i time sadrži veliku količinu aliasinga. Korištenjem drugog koraka podizanja, drugim operatorom U kojeg primjenimo na niz d, možemo poboljšati svojstva niza x_p .

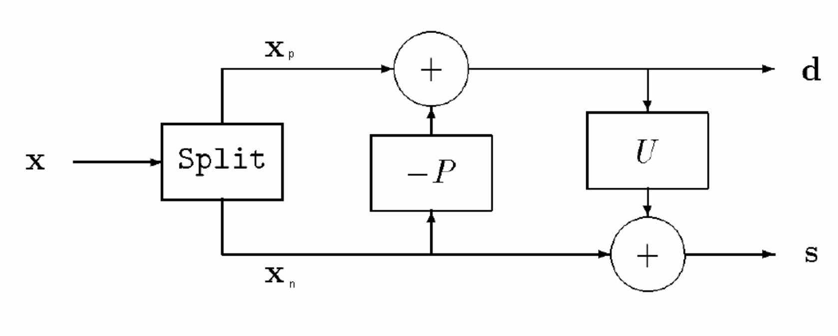
Poboljšani niz nazovimo s:

$$s = x_p + U(d)$$

Rekonstrukcija niza $x_p$se tada vrši obrnutim postupkom:

$$x_p = s - U(d).$$

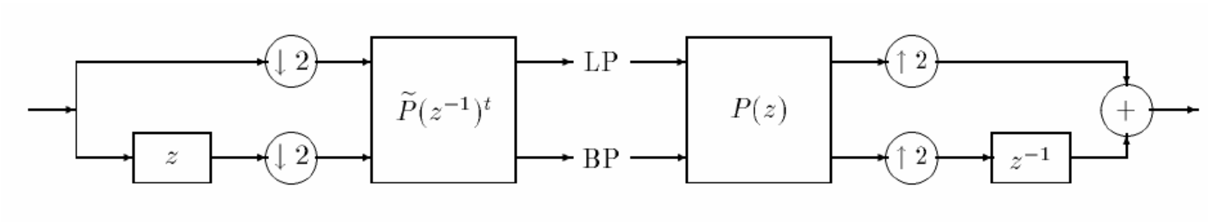
Iz gore navedenoga vidljivo je da za bilo kakve operatore U i P možemo savršeno rekonstruirati x_p i x_n te iznjih niz x, pa čak i ako su U i P nelinearni i vremenski promjenjivi. To je posebno zanimljivo stoga što se onda ova dva operatora mogu vremenski prilagođavati signalu kojeg procesiraju i na taj nači postići maksimalnu kompresiju. Blok shema ljestvičaste strukture koja odgovara ranije napisanim jednadžbama vidljiva je na sljedećoj slici.



Slika 1. Ljestvičasta struktura

Razlaganje u ljestvičastu realizaciju Euklidovim algoritmom

Polaznica za Euklidov algoritam je polifazna reprezentacija wavelet filtarskog sloga, vidljiva na sljedećoj slici:



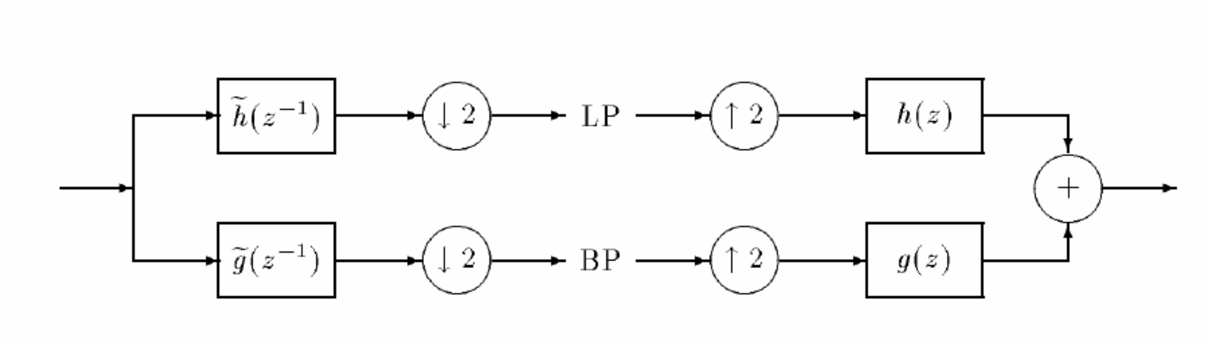
Slika 2. Polifazna izvedba wavelet sloga

Pri čemu polifazna matrica P glasi:

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix},$$

Da bi rekonstrukcija bila potpuna mora vrijediti P(z)* P~$(z^{-1})^t$ = I

Polazni FIR filteri g i h, iz kojih ćemo izvesti ljestvičastu realizaciju, odgovaraju analizirajućim i rekonstrukcijskim filterima sa sheme:



Slika 3. Diskretna wavelet transformacija (podpojasna tranfrmacija)

Ako uspijemo na pogodan način faktorizirat matrice P i P~, moći ćemo isti filter realizirat ljestvičastom strukturom. Kako su matrice P i P~ građene od polinoma, pomaže nam Euklidov algoritam kojim možemo naći najveći zajednički djelitelj dva polinoma. Algoritam kaže sljedeće:

Ako su a(z) i b(z) dva polinoma takva da je red polinoma a(z) veći od reda polinoma b(z) i b(z) nije nula, tada možemo reći da je $a_0(z)$ = a(z) i $b_0(z)$ = b(z) te provesti sljedeći postupak u koracima i, počevši od i = 0:

$$a_{i+1}(z) = b_i(z)$$
$$b_{i+1}(z) = a_i(z) \,\%\, b_i(z).$$

tada je $a_n(z)$ najveći zajednički djelitelj polinoma a(z) i b(z) gdje je n najmanji prirodni broj za koji vrijedi $b_n(z) = 0$.

Označimo li $q_{i+1} = a_i(z) / b_i(z)$ tada vrijedi:

$$\begin{bmatrix} a(z) \\ b(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prema tome, rastavili smo matricu sastavljenu od dvaju polinoma, a i b, na umnožak jednostavnijih matrica. Ukoliko isti postupak ponovimo na polifaznoj matrici wavelet filtarskog sloga dobit ćemo umnožak matrica iz kojih se može direktno izvesti ljestvičasta realizacija. Treba obratiti pažnju da faktorizacia ovim algoritmom nema jednoznačno rješenje, što nam u ovom slučaju zapravo i odgovara. Kvocijenti q se mogu izabrati tako da je najveći zajednički djelitelj konstanta, nazovimo ju K. Vrijedi:

$$\begin{bmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uvijek se može naći recipročni filter g_0 :

$$P^0(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e^0(z) \\ h_o(z) & g_o^0(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

možemo i drugačije zapisati

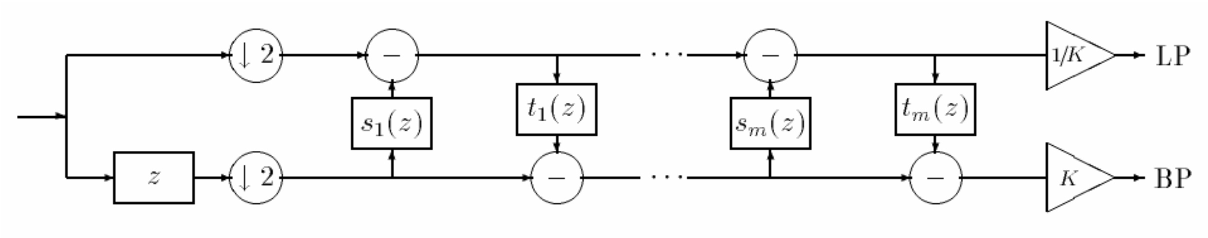
$$P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konačno, moguće je dokazati da uvijek vrijede sljedeće relacije:

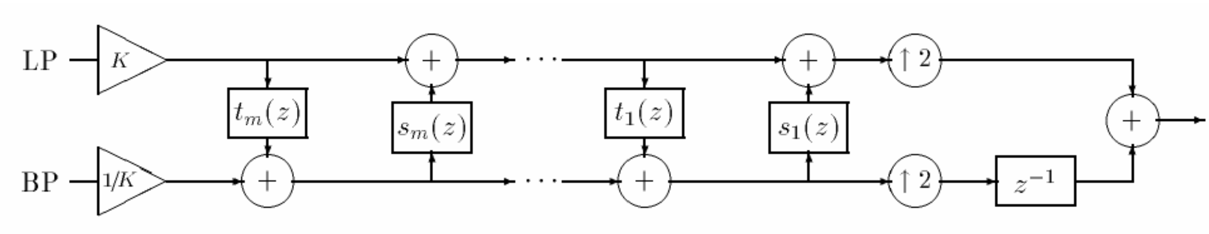
$$P(z) = \prod_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{P}(z) = \prod_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_i(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -t_i(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

A iz tih jednadžbi proizlaze sljedeće sheme za ljestvičastu realizciju:



Slika 4. Analizirajuća strana ljestvičaste realizacije



Slika 5. Rekonstrukcijska strana ljestvičaste realizacije

Primjer proračuna za Haar-ov filtarski slog daje nam sljedeće:

Haarov slog definiran je polinomima:

$h(z) = 1 + z^{-1}$

$g(z) = -1/2 + 1/2\ z^{-1}$

$h\sim = 1/2 + 1/2\ z^{-1}$

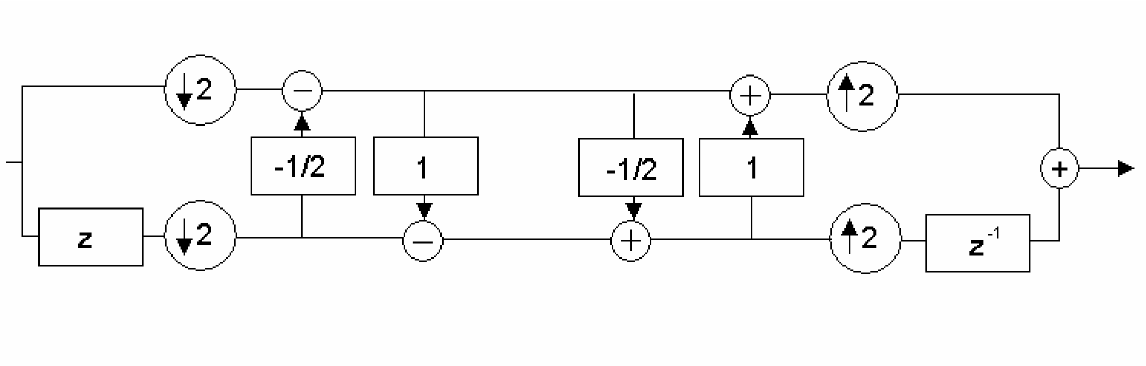
$g\sim = -1 + z^{-1}$

koristeći euklidov algoritam dobijemo:

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(z)^{-1} = \widetilde{P}(1/z) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Te ljestvičasta realzacija za taj slučaj izgleda ovako:



Slika 6. Ljestvičasta struktura Haarovog sloga

Literatura:

Factoring wavelet transforms into lifting steps (1996) – Ingrid Daubechies and Wim Weldens