

Slijepo razdvajanje signala analizom nezavisnih komponenata

Ivica Kopriva

9. studenog 2007.

Sadržaj

- ❑ Što je slijepo razdvajanje signala: ICA vs. PCA
- ❑ Linearni statički problem
- ❑ Linearni dinamički problem

Knjige, Web stranice,

- ❑ J. V. Stone, "Independent Component Analysis – A tutorial," MIT Press, 2004.
- ❑ A. Hyvarinen, J. Karhunen, E. Oja, "Independent Component Analysis," John Wiley, 2001.
- ❑ A. Cichocki, S. Amari, "Adaptive Blind Signal and Image Processing," John Wiley, 2002.

Konferencije:

- ❑ January, 1999, Aussois, France <http://sig.enst.fr/~cardoso/>
- ❑ June, 2000, Helsinki, Finland <http://www.cis.hut.fi/>
- ❑ December, 2001, San Diego, USA <http://www.cnl.salk.edu/>
- ❑ April, 2003, Nara, Japan <http://www.kecl.ntt.co.jp/icl/signal/ica2003/>
- ❑ September, 2004, Granada, Spain <http://atc.ugr.es/ica2004/>
- ❑ March 2006, Charlstone, NC, USA <http://www.cnel.ufl.edu/ica2006/>
- ❑ September 2007, London, UK <http://www.elec.gmul.ac.uk/ica2007/>

Što je slijepo razdvajanje signala?

Zamislite situaciju u kojoj su signali s dva mikrofona težinske kombinacije dva signala emitirana od govornika i pozadinskog šuma.

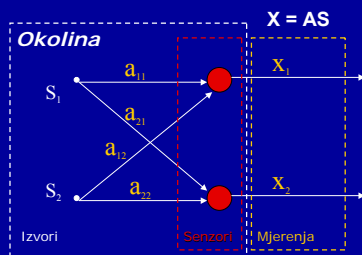
$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}s_1 + a_{12}s_2 \\ X_2 &= a_{21}s_1 + a_{22}s_2 \end{aligned}$$

Problem se sastoji u procjeni govornog signala (s_1) i šuma (s_2) iz snimljenih signala x_1 i x_2 .

Kada bi težinski koeficijenti a_{11} , a_{12} , a_{21} i a_{22} bili poznati problem bi se riješio običnom matricnom inverzijom.

ICA omogućava procjenu govornog signala (s_1) i šuma (s_2) bez poznavanja težinskih koeficijenata a_{11} , a_{12} , a_{21} i a_{22} . Zbog toga se problem rekonstrukcije izvornih signala s_1 i s_2 naziva problemom *slijepog razdvajanja signala*.

Što je slijepo razdvajanje signala?



Što je slijepo razdvajanje signala?¹

Problem rekonstrukcije vektora izvornih signala s iz statičke:

$$\begin{aligned} X &= AS, \quad X \in \mathbb{R}^{N \times T}, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times M}, \quad S \in \mathbb{R}^{M \times T} \\ N &- \text{ broj senzora;} \\ M &- \text{ broj izvornih signala (nepoznat !!!!)} \\ T &- \text{ broj uzoraka} \end{aligned}$$

Ili dinamičke okoline

$$\begin{aligned} X &= A \cdot S \\ x_n(t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^K a_{nm}(k) s_m(t-k) \quad K - \text{ red filtera ?} \end{aligned}$$

koristeći samo vektor mjerenja x te minimalan broj *a priori* informacija o izvornim signalima.

¹Ch. Jutten, J. Herault, "Blind separation of sources, part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture", Sig. Proc., 24(1):1-10, 1991.

Što je slijepo razdvajanje signala?

Analiza nezavisnih komponenata (ICA)² uspješno rješava problem slijepog razdvajanja signala pod uvjetom da su signali s_m međusobno statistički nezavisni i osim možda jednoga imaju ne-Gaussove raspodjele. **Uvjet je da je broj senzora N veći ili jednak broju izvora M .**

Moguće je pronaći matricu skalara ili matricu impulsnih odziva W tako da bude:

$$Y \cong S = WX$$

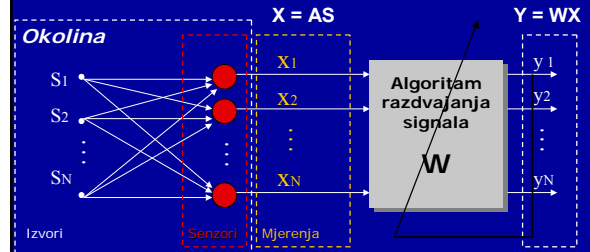
ili

$$Y \cong S = W^* X$$

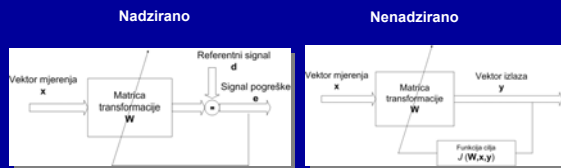
pri čemu važi $Y \cong P A S$. P je opća permutacijska matrica, a A je dijagonalna matrica.

²P. Common, "Independent Component Analysis – a new concept?", Signal Processing, 36(3):287-314, 1994.

Što je slijepo razdvajanje signala?



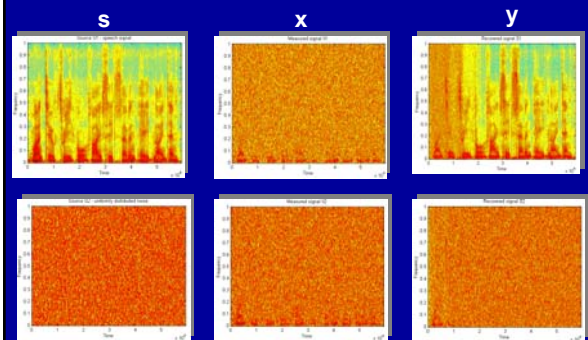
Učenje sa i bez nadzora



Nenadzirano učenje se ostvaruje kroz implementaciju principa reduciranja zalihosti.³

³H. Barlow, "Possible principles underlying the transformation of sensory messages," Sensory Communications, pp. 214-234, 1961.

Razdvajanje govornog signala i šuma



Uvjeti za ICA ?

- izvorni signali $s_m(t)$ moraju biti statistički nezavisni.

$$p(\mathbf{s}) = \prod_{m=1}^M p_m(s_m)$$

- izvorni signali $s_m(t)$, osim najviše jednoga, moraju biti ne-Gaussovi.

$$C_n(s_m) \neq 0 \quad n > 2$$

$$p_m(s_m) \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left(-\frac{s_m^2(t)}{2\sigma_m^2}\right)$$

- matrica miješanja A mora biti ne-singularna ($\det A \neq 0$).

$$W \cong A^{-1}$$

Poznavanje fizikalne interpretacije matrice miješanja ponekad ima veliku važnost.

Neodređenosti ICA transformacije ?

- a) Varianca (energija) nezavisnih komponenata ne može se odrediti. To se naziva *neodređenost skaliranja*. Razlog je u tome da kada su S i A nepoznati bilo koji skalarni multiplikator s jednim od izvora se može poništiti djeljenjem odgovarajućeg stupca matrice A istim multiplikatorom:

$$X = \sum_m \left(\frac{1}{\alpha_m} \mathbf{a}_m \right) (s_m \alpha_m)$$

- b) Poredak nezavisnih komponenata se ne može odrediti. To se naziva *permutacijskom neodređenošću*. Razlog je da se komponente izvornog vektora s i stupci matrice miješanja A mogu slobodno zamijeniti tako da bude

$$X = AP^{-1}PS$$

gdje je P permutacijska matrica, PS je novi izvorni vektor s originalnim komponentama ali u drugačijem poretku, a AP^{-1} je nova nepoznata matrica miješanja.

Kako radi ICA ?

Zašto su Gaussove varijable *zabranjene*? Centralni granični teorem tvrdi da je statistička raspodjela linearne kombinacije x slučajnih procesa s_1 i s_2 bliža Gaussovoj raspodjeli nego su to raspodjele procesa s_1 i s_2 .

Jedan od načina da se izvede algoritam slijepog razdvajanja signala metodom analize nezavisnih komponenata, pronalaženje matrice W , je da se maksimizira mjera udaljenosti od Gaussove raspodjele.

Pretpostavimo da su dvije nezavisne komponente s_1 i s_2 Gaussove. Njihova združena funkcija gustoće raspodjele vjerojatnosti dana je sa

$$p(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|s\|^2}{2}\right)$$

Kako radi ICA ?

Pretpostavimo da su izvorni signali miješani s ortonormalnom matricom miješanja tj. $A^{-1}=A^T$. Njihova združena funkcija gustoće raspodjele vjerojatnosti dana je sa

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|A^T x\|^2}{2}\right) |\det A^T| = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right) |\det A| = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right)$$

Distribucije originalnih i miješanih signala su identične → ne postoji način na koji se može procijeniti matrica miješanja iz miješanih signala.

Maksimizacija udaljenosti od Gaussove raspodjele nema smisla!!!



s_1

s_2



x_1

x_2

$$x_1 = 2s_1 + s_2$$

$$x_2 = s_1 + s_2$$

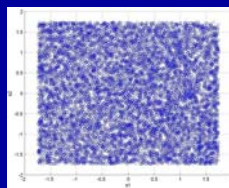
$$y_1 \cong s_1 (?)$$

$$y_2 \cong s_2 (?)$$

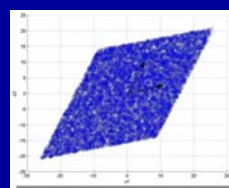
Kako radi ICA ?

Da bi se pokazao princip rada ICA razmotrit ćemo dva nezavisna uniformno distribuirana signala s_1 i s_2 . Scatter dijagram (grafička ilustracija združene funkcije gustoće raspodjele vjerojatnosti) na lijevoj slici pokazuje nepostojanje redukcije između njih, tj. ne može se steći nikakvo znanje o s_2 poznavajući s_1 .

Desna slika prikazuje dva miješana signala dobivena prema $x=AS$, gdje je $A=[5 \ 10; 10 \ 2]$. Očigledno postoji zavisnost između x_1 i x_2 . Poznavajući maksimum ili minimum od x_1 omogućava da se pogodi $x_2 \rightarrow A$ se može procijeniti. No, što se događa kada izvorni signali imaju različite statistike?



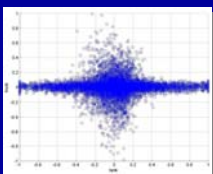
Izvorni signali



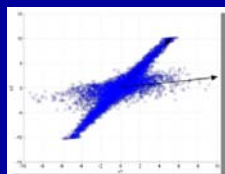
Miješani signali

Kako radi ICA ?

Razmotrimo dva nezavisna izvorna signala s_1 i s_2 generirana kamionskim i tenkovskim motorima. Scatter dijagram na lijevoj slici pokazuje da ne postoji redukcija između izvornih signala tj. na temelju informacija o s_1 ne može se predvidjeti s_2 . No distribucije nisu uniformne nego su *rijetke*. Desna slika prikazuje miješane signale dobivene prema $X=AS$ gdje je $A=[5 \ 10; 10 \ 2]$. Očigledno je da postoji zavisnost između x_1 i x_2 . No bridovi su ovaj put na drugim mjestima. Procjena A iz scatter dijagrama bila bi vrlo nepouzdana. **ICA to može napraviti za različite statistike izvornih signala ne znajući ih unaprijed.**



Izvorni signali



Miješani signali

PCA i ICA

- Da bi se izdvojili izvorni signali (slike) potrebno je minimizirati statističku nezavisnost između mjerenih signala x_1 i x_2 .
- Prvi korak je minimizacija statističke zavisnosti drugog reda tj. dekorrelacija x_1 i x_2 . To se radi sa **PCA transformacijom**.
- Drugi korak je minimizacija statističke zavisnosti višeg reda. To se radi s **ICA transformacijom**. To ima smisla samo ako su signali od interesa ne-Gaussovi.

Prostorno i vremenski nezavisni procesi

Procesi x_i i x_j su prostorno nezavisni ako važi:

$$p(x_i, x_j) = p(x_i)p(x_j) \cong E[x_i, x_j] = E[x_i]E[x_j] \quad \forall i \neq j$$

Proces x je vremenski nezavisan ako važi:

$$p(x(t)x(t+\tau)) = p(x(t))p(x(t+\tau)) \\ \cong E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t)]E[x(t+\tau)] \quad \forall \tau \neq 0$$

ICA vs. PCA

Analiza glavnih komponenta (PCA) i dekokrelacija signala. PCA je transformacija koja se upotrebljava za dekokrelaciju viševarijabilnih skupova podataka. PCA se u kombinaciji s ICA vrlo često koristi kao prvi korak nakon čega viševarijabilni skup podatak postaje *prostorno* dekokreliran s jediničnom varijancom. PCA transformacija se projektiraju na temelju svojstvene dekompozicije matrice kovarijance od \mathbf{X} :

$$\mathbf{R}_{xx} \approx (1/T) \sum_{t=1}^T \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)$$

Podrazumijeva se da podaci \mathbf{x} imaju nultu srednju vrijednost. To se lako postiže sa $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} - \mathbf{E}\{\mathbf{x}\}$. Svojtvena dekompozicija \mathbf{R}_{xx} se dobije kao

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^T$$

gdje je \mathbf{E} matrica svojstvenih vektora a $\mathbf{\Lambda}$ je dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti matrice \mathbf{R}_{xx} .

ICA vs. PCA

PCA transformacija se dobije kao

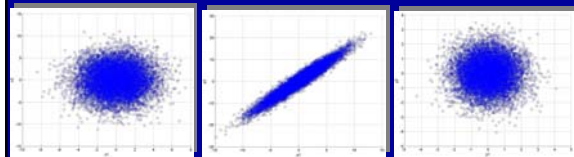
$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{x}$$

Pri čemu se lagano verificira

$$\begin{aligned} E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] &= E[\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}] = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{E}^T E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{-1/2} \\ &= \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \underbrace{\mathbf{E}^T\mathbf{E}}_{\mathbf{I}} \underbrace{\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^T\mathbf{E}}_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Lambda}^{-1/2} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1/2} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

ICA vs. PCA

Scatter dijagrami dva nekorelirana Gaussova signala (lijevo); dva korelirana signala dobivena kao linearna kombinacija dva nekorelirana Gaussova signala (centar); dva signala nakon PCA transformacije (desno).



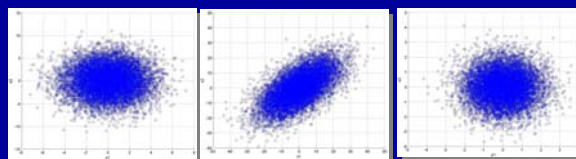
$$x_1 = N(0,4); x_2 = N(0,9)$$

$$z_1 = x_1 + x_2 \\ z_2 = x_1 + 2x_2$$

$$y = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{z} \\ \mathbf{z} = [z_1; z_2]$$

ICA vs. PCA

Zašto su Gaussove varijable zabranjene? Razmotrimo kombinaciju dva Gaussova signala $s_1 = N(0,4)$ i $s_2 = N(0,9)$. Nakon dekokrelacije scatter dijagram je identičan onom za izvorne signale. Nema redukcije nakon dekokrelacije → nema posla za ICA.



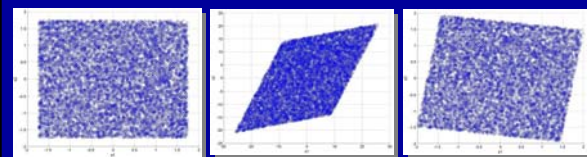
Izvorni signali

Miješani signali

Dekorelirani signali

ICA vs. PCA

Dekokrelacija je polovica ICA. PCA transformacija dekokrelira signale. Ako su signali ne-Gaussovi to ih ne čini nezavisnim. PCA transformacija je obično koristan prvi korak u ICA. Drugi korak rotacije s unitarnom matricom se može dobiti pomoću ICA eksploatirajući ne-Gaussov karakter signala.



Izvorni signali

Miješani signali

Dekorelirani signali

PCA

PCA primijenjen na ekstrakciju slike:

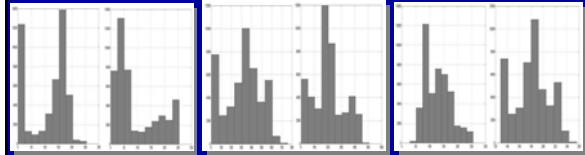


Z_1

Z_2

MATLAB code: `Rx=cov(X'); % procjena matrice kovarijance`
`[E,D]=eig(Rx); % svojstvena dekompozicija matrice kovarijance`
`Z=E'*X; % PCA transformacija`
`z1=reshape(Z(1,:),P,Q); % transformacija vektora u sliku`
`figure(1); imagesc(z1); % prikaz prve PCA slike`
`z2=reshape(Z(2,:),P,Q); % transformacija vektora u sliku`
`figure(2); imagesc(z2); % prikaz druge PCA slike`

Histogrami izvornih, miješanih i PCA izdvojenih slika



Izvorne slike

Miješane slike

PCA izdvojene slike

ICA za linearna statički problem

Maksimizacija udaljenosti od Gaussove raspodjele

Maksimizacija udaljenosti od Gaussove raspodjele

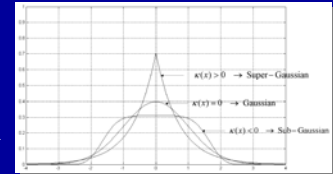
Centralni granični teorem tvrdi da je statistička raspodjela lineare kombinacije $x_i = a_i s_1 + a_i s_2$ slučajnih procesa s_1 i s_2 bliža Gaussovoj raspodjeli nego su to raspodjele procesa s_1 i s_2 .

Jedan od načina da se izvede algoritam slijepog razdvajanja signala metodom analize nezavisnih komponentata, pronalaženje matrice \mathbf{W} , je da se maksimizira mjera udaljenosti od Gaussove raspodjele.

Slučajni procesi se klasificiraju na super-Gaussove, Gaussov i sub-Gaussove prema vrijednosti parametra zvanog *kurtosis*. Za slučajni proces \mathbf{x} sa nultom srednjom vrijednošću *kurtosis* je definiran sa

$$\kappa(x) = \frac{E(x^4)}{(E(x^2))^2} - 3$$

$$E[x^p] \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x^p(t), \quad p \in \{2, 4\}$$



Maksimizacija udaljenosti od Gaussove raspodjele

Pretpostavimo da je vektorski slučajni proces \mathbf{Z} standardiziran (nulta srednja vrijednost i jedinična varijanca). Izvorni signal s_m se dobije kao

$$s_m = \mathbf{w}^T \mathbf{Z}$$

Kurtosis slučajnog procesa s_m je

$$\kappa(s_m) = E[(s_m)^4] - 3$$

Vektor razdvajanja \mathbf{w} se dobije kao rješenje optimizacijskog problema

$$J(\mathbf{w}) = \max_{\mathbf{w}} \{ \kappa(s_m) \} = \max_{\mathbf{w}} \{ \kappa(\mathbf{w}^T \mathbf{Z}) \}$$

$$\Delta \mathbf{w} = \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{w}} = \text{sign}(s_m) \frac{\partial E[(\mathbf{w}^T \mathbf{Z})^4]}{\partial \mathbf{w}} = 4 \text{sign}(s_m) E(s_m^3 \mathbf{Z})$$

Da bi varijanca signala s_m ostala jedinična potrebno je normalizirati $\Delta \mathbf{w}$ pri svakom koraku adaptacije

$$\mathbf{w} \leftarrow \frac{\Delta \mathbf{w}}{\|\Delta \mathbf{w}\|}$$

Maksimizacija udaljenosti od Gaussove raspodjele

Prije izdvajanja novog izvornog signala potrebno je iz mjerenih podataka \mathbf{Z} eliminirati već izdvojene izvorne signale:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_{p-1}]$$

$$\hat{\mathbf{Z}} \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{W}(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T) \mathbf{Z}$$

ICA za linearna statički problem

Informacijsko-teorijska ICA

Informacijsko-teorijska ICA

ICA metodom maksimalne vjerojatnosti (MV)⁴. Vjerojatnost ICA modela bez šuma $\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{s}$ se formulira kao:

$$p_x(\mathbf{x}) = |\det \mathbf{W}| p_s(\mathbf{s}) = |\det \mathbf{W}| \prod_m p_m(s_m)$$

gdje $\mathbf{W}=[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M]=\mathbf{A}^{-1}$. MV znači da želimo maksimizirati vjerojatnost da su podaci \mathbf{x} dobiveni sa modelom $\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{s}$. Budući je $\mathbf{s}_m=\mathbf{w}_m^T \mathbf{x}$, $p_x(\mathbf{x})$ se može napisati kao:

$$p_x(\mathbf{x}) = |\det \mathbf{W}| \prod_m p_m(\mathbf{w}_m^T \mathbf{x})$$

⁴D. T. Pham, "Blind separation of mixtures of independent sources through a quasimaximum likelihood approach," *IEEE Trans. Signal Processing* 45, pp. 1712-1725, 1997.

Informacijsko-teorijska ICA

Vjerojatnost $L(\mathbf{W})$ se procjenjuje preko T mjerenja kao:

$$L(\mathbf{W}) = \prod_{t=1}^T \prod_{m=1}^M p_m(\mathbf{w}_m^T \mathbf{x}(t)) |\det \mathbf{W}|$$

Normalizirana log-vjerojatnost se dobije kao:

$$\frac{1}{T} \log L(\mathbf{W}) = E \left\{ \sum_{m=1}^M \log p_m(\mathbf{w}_m^T \mathbf{x}(t)) \right\} + \log |\det \mathbf{W}|$$

Gradjent log-vjerojatnosti daje:

$$\Delta \mathbf{W} = \frac{1}{T} \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{W}} = \left[\mathbf{W}^T \right]^{-1} - E \left\{ \varphi(\mathbf{W}\mathbf{x}) \mathbf{x}^T \right\}$$

Informacijsko-teorijska ICA

gdje se nelinearnost $\varphi(y_i)$ naziva *score funkcijom* danom sa

$$\varphi_i = - \frac{1}{p_i} \frac{dp_i}{dy_i}$$

Euklidov gradjent se mora korigirati tenzorom $\mathbf{W}^T \mathbf{W}^5$ što daje *batch* MV ICA algoritam:

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) + \eta \left[\mathbf{I} - E \left\{ \varphi(\mathbf{y}) \mathbf{y}^T \right\} \right] \mathbf{W}(k)$$

Adaptivan MV ICA algoritam se dobije ispuštanjem matematičkog očekivanja:

$$\mathbf{W}(t+1) = \mathbf{W}(t) + \eta \left[\mathbf{I} - \varphi(\mathbf{y}(t)) \mathbf{y}(t)^T \right] \mathbf{W}(t)$$

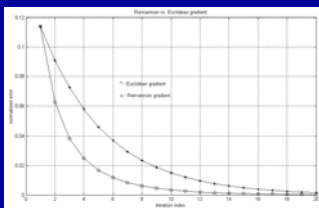
⁵S. Amari, "Natural gradient works efficiently in learning," *Neural Computation* 10(2), 251-276, 1998.

⁶J.F. Cardoso and B.Laheld, "Equivariant adaptive source separation," *IEEE Trans. on Signal Proc.* 44(12), 3017-3030, 1996.

"Prirodni" gradjent

Parametarski prostor kvadratnih matrica ima Riemannovu geometriju. Euklidov gradjent skalarnе funkcije J s matricnim argumentom \mathbf{W} ne pokazuje u smjeru najbrže promjene funkcije J . Euklidov gradjent je potrebno korigirati s članom $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ da bi se dobio gradjent prirodan za parametarski prostor kvadratnih matrica.

$$PG(J(\mathbf{W})) = (\partial J(\mathbf{W}) / \partial \mathbf{W}) \mathbf{W}^T \mathbf{W}$$

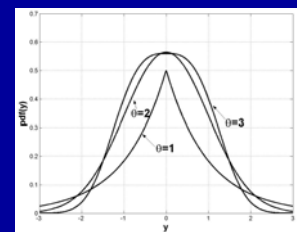


Informacijsko-teorijska ICA

Optimalni izbor nelinearnosti $\varphi(y)$ ovisi o nepoznatoj raspodjeli signala. Fleksibilna nelinearnost koja je dobra za široki spektra distribucija može se izvesti iz poopćene Gaussove raspodjele^{7,8}:

$$p_i(y_i) = \frac{\theta_i}{2\sigma_i \Gamma(1/\theta_i)} \exp \left(- \frac{1}{\theta_i} \left| \frac{y_i}{\sigma_i} \right|^{\theta_i} \right)$$

S jednim parametrom θ_i (Gaussov eksponent) mogu se modelirati super-Gaussove raspodjele ($\theta_i < 2$) i sub-Gaussove raspodjele ($\theta_i > 2$).



⁷S. Choi, A. Cichocki, S. Amari, "Flexible Independent Component Analysis," *Journal VLSI, KAP*, 2000.

⁸L. Zhang, A. Cichocki, S. Amari, "Self-adaptive Blind Source Separation Based on Activation Function adaptation," *IEEE Tran. On Neural Networks*, vol. 15, No. 2, pp. 233-244, March, 2004.

Informacijsko-teorijska ICA

Ako se poopćena Gaussova raspodjela supstituira u izraz sa score funkciju dobije se:

$$\varphi_i(y_i) = \text{sign}(y_i) |y_i|^{\theta_i - 1}$$

Ako je raspoloživo a priori znanje o statističkoj raspodjeli izvornih signala θ_i se može fiksirati unaprijed.

Na primjer ako su izvorni signali govor ili glazba θ_i se može postaviti na $\theta_i = 1$, zbog toga što govor i glazba spadaju u klasu super-Gaussovih signala.

Ako su izvorni signali komunikacijski signali θ_i se može postaviti na $\theta_i = 2.5$ ili $\theta_i = 3$, zbog toga što su komunikacijski signali sub-Gaussovi.

Alternativa je da se θ_i procjenjuje adaptivno iz samih podataka⁷.

Informacijsko-teorijska ICA

U Ref.[9] je predložen pristup procjeni score funkcije iz podataka. Temelji se na procjeni funkcije gustoće raspodjele vjerojatnosti koristeći estimator sa Gaussovom jezgrom.

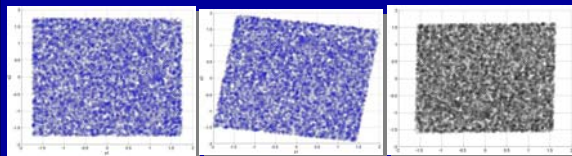
$$\hat{p}_i(y_i(t), y_i) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T G(y_i(t) - y_i(n), \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$\frac{d\hat{p}_i(y_i)}{dy_i} = -\frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \frac{y_i(t) - y_i(n)}{\sigma^2} G(y_i(t), \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$G(y_i(t), \sigma^2 \mathbf{I}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y_i^2(t)}{2\sigma^2}\right)$$

⁹S. J.C. Principe, D. Xu and J.W. Fisher, "Information-Theoretic Learning," Chapter 7 in *Unsupervised Adaptive Filtering- Volume I Blind Source Separation*, ed. S. Haykin, J. Wiley, 2000. .

Scatter dijagrami PCA i ICA izdvojenih signala



Izvorni signali

PCA izdvojeni signali

ICA izdvojeni signali
(min $MV(y)$).

Domaća zadaća: - reproducirati ove rezultate

PCA i ICA izdvojene slike



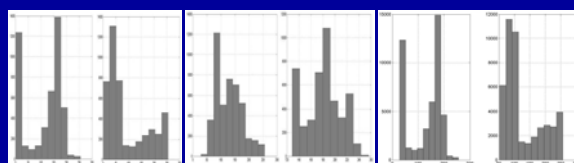
PCA



ICA (min $MV(y)$)

Domaća zadaća: - reproducirati ove rezultate

Histogrami PCA i ICA izdvojenih slika



Izdvojene slike

PCA izdvojene slike

ICA izdvojene slike

Ostali ICA algoritmi za statički problem

- ◆ Informacijsko-terorijski pristup¹⁰⁻¹²
- ◆ Tenzorske metode (Kumulanti četvrtog reda)¹³
- ◆ Vremenski zakašnjele korelacije¹⁴⁻¹⁷
- ◆ Kernel ICA algoritam¹⁸

¹⁰A. Hyvärinen and E. Oja, "A fast fixed-point algorithm for independent component analysis," *Neural Computation*, vol. 9, pp. 1483-1492, 1997.

¹¹A. J. Bell and T. J. Sejnowski, "An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution," *Neural Computation*, vol. 7, pp. 1129-1159, 1995.

¹²D. Erdogmus, K. E. Hild III, Y. N. Rao and J.C. Principe, "Minimax Mutual Information Approach for Independent Component Analysis," *Neural Computation*, vol. 16, No. 6, pp. 1235-1252, June, 2004.

¹³J. F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non-Gaussian signals," *IEE-Proc. - F*, vol. 140, pp. 1362-1370, 1993.

¹⁴L. Molgedey and H. G. Schuster, "Separation of mixture of independent signals using time delayed correlations," *Physical Review Letters*, vol. 72, pp. 3634-3636, 1994.

¹⁵L. Tong, R.W. Liu, V.C. Soen, and Y. F. Huang, "Indeterminacy and identifiability of blind identification," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 38:499-509, 1991.

¹⁶A. Belouchrani, K.A. Merain, J.F. Cardoso, and E. Moulines, "A blind source separation technique based on second order statistics," *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(2), pp. 434-444, 1997.

¹⁷A. Ziehe, K.R. Muller, G. Nolte, B. M. Mackert, and G. Curio, "TDSEP-an efficient algorithm for blind separation using time structure," *Proc. ICANN'98*, pp. 675-680, Skovde, Sweden, 1998.

¹⁸F. R. Bach and M. I. Jordan "Kernel Independent Component Analysis," *Journal of Machine Learning Research* 3, pp.1-48, 2002.

Neki zanimljivi linkovi

ICALAB programski paket-RIKEN Brain Science Institute (Tokyo, Japan):
<http://www.bsp.brain.riken.jp/ICALAB/ICALABSignalProc/>

MATLAB kod za FastICA algoritam (Helsinki University of Technology, Helsinki, Finska): <http://www.cis.hut.fi/projects/ica/fastica/>.

MATLAB kod za kernel-ICA algoritam (UC Berkley, SAD):
<http://www.cs.berkeley.edu/~fbach/kernel-ica/>

MATLAB kod za JADE algoritam (ENST, Paris, Francuska) :
<http://www.tsi.enst.fr/~cardoso/Algo/Jade/jade.m>

ICA za linearna dinamički problem

rješenje problema slijepog razdvajanja signala u konvolucijskim sustavima

Dinamički problem

U mnogim situacijama u području akustike i komunikacija primljeni signali su superpozicije višestrukih refleksija nepoznatih izvornih signala.

Taj fenomen je poznat pod popularnim nazivom *cocktail-party* problem.

Dinamički problem se može opisati matricom miješanja čiji su elementi prijenosne funkcije između pojedinačnih izvora i senzora.

Kada su i matrica prijenosnih funkcija i izvorni signali nepoznati problem se naziva višekanalnom slijepom dekonvolucijom (VSD)¹⁹⁻²².

¹⁹A. Hyvarinen, J. Karhunen and E. Oja, *Chapter 19* in Independent Component Analysis, J. Wiley, 2001.

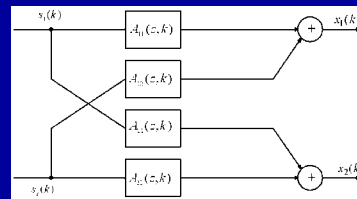
²⁰A. Cichocki, S. Amari, *Chapter 9* in Adaptive Blind Signal and Image Processing – Learning Algorithms and Applications, J. Wiley, 2002.

²¹R. H. Lambert and C.L. Nikias, *Chapter 9* in Unsupervised Adaptive Filtering – Volume I Blind Source Separation, S. Haykin, ed., J. Wiley, 2000.

²²S. G. Douglas and S. Haykin, *Chapter 3* in Unsupervised Adaptive Filtering – Volume II Blind Deconvolution, S. Haykin, ed., J. Wiley, 2000.

Dinamički problem

Konvolucijski model za sustav 2x2: $x_j(n) = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=0}^{L_j} a_{jm}(l)s_m(n-l) \quad m=1,2$



Dinamički problem

Višekanalna slijepa dekonvolucija

$$\begin{array}{c}
 \text{Slijepa separacija} \\
 \text{rjesava problem prostorne interferencije}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{Jednokanalna slijepa dekonvolucija} \\
 \text{rjesava problem vremenske interferencije}
 \end{array}$$

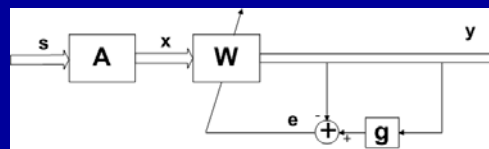
Problem jednokanalne slijepe dekonvolucije još je poznat pod nazivom slijepa ekvalizacija.

U rekonstrukciji audio signala rješenje slijepe separacije je dovoljno. Zbog obojenih statistika audio signala potpuna dekonvolucija nije poželjna jer mnogi algoritmi imaju učinak bijeljenja spektra, što uništava integritet signala.

U višekanalnim komunikacijskim sustavima i separacija i dekonvolucija su nužne. Kako su komunikacijski signali aproksimativno i.i.d. procesi, problem slijepe dekonvolucije je lakše rješiv.

Dinamički problem

Višekanalno slijepo inverzno modeliranje, ekvalizacija i razdvajanje. Ulazni signal je nepoznat te nema referentnog ili željenog signala.



U odnosu na statički problem, elementi matrice miješanja **A** u konvolucijskom modelu su filtri a_{ij} . Oni sadrže impulsne odzive između i^{og} ulaza i j^{og} izlaza. Mi ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da je broj izlaza i ulaza isti i jednak N .

Dinamički problem

Notacija. NxN matrica miješanja je opisana kao:

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n z^{-n} = [a_{ij}(z)]$$

$$a_{ij}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{ij,n} z^{-n} \quad i, j = 1 \dots N.$$

Podrazumijeva se da je svaki kanal stabilan, tj. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{ij,n}| < \infty$.

$\mathbf{A}(z)$ je matrica polinoma ili matrica Laurentovih razvoja u red.

\mathbf{A}_n je koeficijent matricnog polinoma ili koeficijent matricnog Laurentovog razvoja.

Dinamički problem

Dinamički (konvolucijski) model u Z domeni:

$$\mathbf{x}(z) = \mathbf{A}(z)\mathbf{s}(z)$$

gdje su izvorni, mjereni i rekonstruirani signali opisani dvostranom Z transformacijom:

$$s_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{i,n} z^{-n}$$

$$x_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{i,n} z^{-n}$$

$$y_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{i,n} z^{-n} \quad i = 1 \dots N$$

Inverzni sustav je opisan sa:

$$\mathbf{W}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{W}_n z^{-n} = [w_{ij}(z)]$$

$$w_{ij}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{ij,n} z^{-n} \quad i, j = 1 \dots N$$

Dinamički problem

Realni kanali su kauzalni s konačnim redom L

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{n=0}^L \mathbf{A}_n z^{-n} = [a_{ij}(z)]$$

Red kanala se mora procijeniti, a u vezi je s maksimalnim kašnjenjem τ_{\max} koje se može desiti u tzv. *multipath* scenariju:

$$L \geq \tau_{\max} F_s$$

gdje F_s predstavlja frekvenciju otipkavanja. Međutim, **nekauzalna** reprezentacija je nužna za modeliranje **inverza neminimalno faznih (NMF)** kanala:

$$\mathbf{W}(z) = \sum_{n=-L}^L \mathbf{W}_n z^{-n} = [w_{ij}(z)]$$

$$w_{ij}(z) = \sum_{n=-L}^L w_{ij,n} z^{-n} \quad i, j = 1 \dots N.$$

Dinamički problem

Rekonstruirani signali se dobiju kao:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{l=-L}^L w_{ij}(l) x_j(t-l) \quad i = 1 \dots N$$

Nekauzalna implementacija inverznih sustava zahtijeva da mjereni signali budu poznati **unaprijed u vremenu** (prije nego su se stvarno dogodili). Kako to nije ostvarivo, uvodi se linija za kašnjenje od L uzoraka čime se realizira nekauzalna implementacija:

$$y_i(t-L) = \sum_{j=1}^N \sum_{l=-L}^L w_{ij}(l) x_j(t-L-l) \quad i = 1 \dots N$$

To ima za posljedicu kašnjenje od L uzoraka nezavisno od toga da li se radi s adaptivnim ili blok-adaptivnim implementacijama.

Dinamički problem

Zašto stabilan inverz NMF sustava zahtijeva ne-kauzalnu implementaciju?

Razmotrimo prijenosnu funkciju prvog reda:

$$w_{ij}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

za neki realan a. Smatra se da je $w_{ij}(z)$ inverz direktnog filtra $a_{ij}(z)=1-az^{-1}$. Područje konvergencije (PK) je dano sa:

$$|z| > |a|$$

Pretpostavimo $|a| < 1$. Tada polovi $w_{ij}(z)$ leže unutar jedinične kružnice za $z=\exp(j\omega)$, te se $w_{ij}(z)$ može reprezentirati kauzalnom (jednostranom) z-transformacijom:

$$w_{ij}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

Dinamički problem

Pretpostavimo sada da je $|a| > 1$. Tada polovi $w_{ij}(z)$ leže izvan jedinične kružnice za $z=\exp(j\omega)$. U tom slučaju područje konvergencije postaje

$$|z| < |a|$$

Sekvenca sa z-transformacijom $w_{ij}(z)=1/(1-az^{-1})$ i gornjim područjem konvergencije je dana sa:

$$w_{ij}(n) = -a^n u(-n-1)$$

gdje u() predstavlja step funkciju. z-transformacija od $w_{ij}(n)$ se sada dobije kao:

$$w_{ij}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{ij}(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

što predstavlja **stabilnu** ($|a| < 1$) ali **ne-kauzalnu** implementaciju inverza NMF kanala $a_{ij}(z)=1-az^{-1}$.

Jednokanalna slijepa dekonvolucija

Matematička formulacija:

$$y(t) = \sum_{l=-L}^L w_l x(t-l)$$

$$x(t) = \sum_{l=0}^L a_l s(t-l)$$

Pretpostavke:

P1) Izvorni signali moraju biti ne-Gausovski. Zbog centralnog graničnog teorema $x(t)$ je vrlo blizak Gaussovom procesu čak i kada je $s(t)$ ne-Gaussov. Maksimizacijom udaljenosti od Gaussove raspodjele nema smisla ako su izvorni signali Gaussovi.

P2) Izvorni signali moraju biti nezavisni identično i distribuirani (i.i.d.) procesi (vremenski bijeli):

$$E[s(t)s(t-l)] = \sigma^2 \delta_l$$

$$p_s(t_1) = p_s(t_2)$$

Jednokanalna slijepa dekonvolucija

Jednokanalna slijepa dekonvolucija kao statički ICA problem:

$$\tilde{\mathbf{x}} \cong \mathbf{A} \tilde{\mathbf{s}}$$

$$\tilde{\mathbf{s}}(t) = [s(t) \ s(t-1) \ \dots \ s(t-2L+1)]^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = [x(t) \ x(t-1) \ \dots \ x(t-L+1)]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_L \\ 0 & a_1 & \dots & a_{L-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

ICA zahtjeva statističku nezavisnost što implicira:

$$E[s(t)s(t-l)] = \sigma^2 \delta_l \quad l = 0, \dots, L$$

što je ekvivalentno i.i.d. pretpostavci.

Višekanalna slijepa dekonvolucija

Iste pretpostavke se primjenjuju na višekanalnu slijepu dekonvoluciju (VSD=SRS+JSD):

P1) svi izvorni signali moraju biti ne-Gaussovi.

P2) svi izvorni signali moraju biti statistički nezavisni i.i.d. procesi:

$$E[s_i(t-p)s_j(t-q)] = \sigma^2 \delta_{ij} \delta_{pq}$$

Opće rješenje problema slijepog razdvajanja signala je dano sa:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{A}(z) = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{D}(z)$$

gdje je \mathbf{P} opća permutacijska matrica, \mathbf{A} je dijagonalna matrica, i

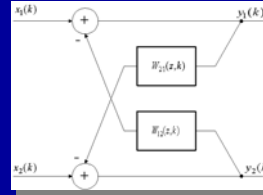
$$\mathbf{D}(z) = \text{diag}\{D_1(z)D_2(z)\dots D_N(z)\}$$

$$D_n(z) = \sum_p d_{np} z^{-p}$$

U općem slučaju cilj SRS je da se izdvoje skalirane i filtrirane verzije nepoznatih izvornih signala.

VSD u vremenskom području

Vremensko područje s povratnom vezom. Asimptotska rješenja za separacijske filtre.



$$W_{12}(z) = A_{12}(z)A_{22}^{-1}(z)$$

$$W_{21}(z) = A_{21}(z)A_{11}^{-1}(z)$$

iii

$$W_{12}(z) = A_{11}(z)A_{21}^{-1}(z)$$

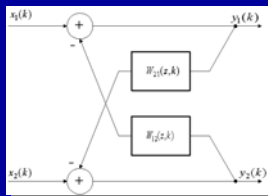
$$W_{21}(z) = A_{22}(z)A_{12}^{-1}(z)$$

VSD u vremenskom području

Pristup preko rekurzivnih arhitektura (povratna veza).

(+) Učinak bijeljenja signala je eliminiran zbog činjenice signali $y(t)$ moraju imati vremensku strukturu da bi poništili odgovarajući izvorni signal $s_j(t)$ u mjerenom signalu $x_n(t)$.

(-) Nije moguće realizirati ne-kauzalnu implementaciju nužnu za inverziju ne-minimalno faznih kanala.

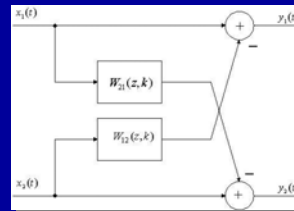


$$y_1(k) = x_1(k) - \sum_{l=1}^L w_{12}(l)y_2(k-l)$$

$$y_2(k) = x_2(k) - \sum_{l=1}^L w_{21}(l)y_1(k-l)$$

VSD u vremenskom području

Vremensko područje bez povratne veze. Asimptotska rješenja za separacijske filtre.



$$W_{12}(z) = -A_{12}(z)A_{22}^{-1}(z)$$

$$W_{21}(z) = -A_{21}(z)A_{11}^{-1}(z)$$

iii

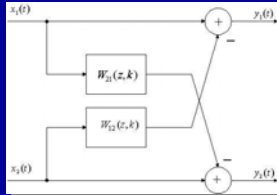
$$W_{12}(z) = -A_{11}(z)A_{21}^{-1}(z)$$

$$W_{21}(z) = -A_{22}(z)A_{12}^{-1}(z)$$

VSD u vremenskom području

Vremensko područje bez povratne veze.

(+) Ne-kauzalna realizacija nužna za implementaciju inverza NMF kanala se lagano implementira čistom linijom za kašnjenje.
 (-) Izdvojeni signali su izbijeljene verzije izvornih signala.



$$y_1(k) = x_1(k) - \sum_{l=-L}^L w_{12}(l)x_2(k-l)$$

$$y_2(k) = x_2(k) - \sum_{l=-L}^L w_{21}(l)x_1(k-l)$$

VSD u vremenskom području

Kontrastna funkcija za VSD se u većini slučajeva izvodi ili je u vezi sa formulacijom VSD problema preko metode maksimalne vjerojatnosti²³.

$$J_{MV}(\mathbf{W}) = \int_{\mathbf{x}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \log \hat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) d\mathbf{x} = E \left\{ \log \hat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) \right\}$$

pri čemu je

$$\hat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) = \left[\hat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) / f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right] f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$$

Kontrastna funkcija se može napisati kao

$$J_{MV}(\mathbf{W}) = -D \left(f_{\mathbf{x}} \parallel \hat{f}_{\mathbf{x}} \right) - H(f_{\mathbf{x}})$$

gdje $D()$ predstavlja Kullback-Leibler udaljenost a $H()$ je Shannonova ili diferencijalna entropija.

²³ D.L. Donoho, "On minimum entropy deconvolution," in D.F. Findley, ed., *Applied Time Series Analysis II*, Academic Press, pp.565-608, 1981.

VSD u vremenskom području

Pravilo učenja za \mathbf{W} se dobije kao:

$$\Delta \mathbf{W} \propto \frac{\partial J_{MV}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = - \frac{\partial D(f_{\mathbf{x}} \parallel \hat{f}_{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{W}}$$

Što znači da je maksimizacija vjerojatnosti ekvivalentna minimizaciji udaljenosti između točne ali nepoznate funkcije gustoće raspodjele vjerojatnosti i njenog modela za dani skup mjerenja.

Kada se pravila učenja za VSD izvedu maksimizacijom funkcije vjerojatnosti oni će ponovo sadržavati score funkcije:

$$\phi_i(y_i) = - \frac{1}{f_i(y_i)} \frac{df_i(y_i)}{dy_i}$$

VSD u vremenskom području

Kako je već pokazano parametrizirani oblik score funkcija se izvodi iz poopćene Gaussove raspodjele:

$$\phi_i(y_i) = \text{sign}(y_i) |y_i|^{\theta_i - 1}$$

gdje jedan parametar θ_i (koji se zove Gaussov eksponent) može modelirati super-Gaussove raspodjele ($\theta_i < 2$) i sub-Gaussove raspodjele ($\theta_i > 2$).

Ako se VSD primjenjuje na probleme u komunikacijama $\theta_i = 3$ je dobar izbor i daje:

$$\phi_i(y_i) = \text{sign}(y_i) |y_i|^2$$

Ako se VSD primjenjuje na audio signale $\theta_i = 1$ je dobar izbor i daje:

$$\phi_i(y_i) = \text{sign}(y_i)$$

VSD u vremenskom području

On-line ICA algoritam metodom maksimalne vjerojatnosti za slijepo razdvajanje signala iz konvolucijskog minimalno faznog modela. Arhitektura sa povratnom vezom. Obojeni signali, kao govor, mogu biti izdvojeni.

$$\Delta w_{ij}(t, l) \cong \frac{\partial J(\varphi(\mathbf{y}))}{\partial w_{ij}(l)} = \phi_i(y_i) y_j(t-l)$$

$$w_{ij}(t+1, l) = w_{ij}(t, l) + \mu \Delta w_{ij}(t, l)$$

$$y_i(t) = x_i(t) - \sum_{j \neq i} \sum_{l=1}^L w_{ij}(t, l) y_j(t-l)$$

gdje i, j označavaju indekse signala, t označava indeks iteracije, l označava indeks koeficijenta, a μ predstavlja konstantu učenja.

VSD u vremenskom području

Ako su izvorni signali bijeli (i.i.d.) arhitektura bez povratne veze se može uporabiti u vremenskom području za realizaciju ne-kauzalne implementacije potrebne za aproksimaciju inverza NMF kanala^{20,24}.

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{p=0}^L \mathbf{W}_p(t) \mathbf{x}(t-p)$$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{p=0}^L \mathbf{W}_{L-p}^H(t) \mathbf{y}(t-p)$$

$$\mathbf{W}_p(t+1) = \mathbf{W}_p(t) + \eta(t) (\mathbf{W}_p(t) - \varphi(\mathbf{y}(t-L)) \mathbf{u}^H(t-p)) \quad p=0, \dots, L$$

gdje je $g()$ funkcijski inverze od φ tako da važi:

$$\varphi_i(g_i(y_i)) = y_i$$

L je dužina filtra, t je indeks vremena, p je indeks koeficijenta matricnog polinoma, a η je mala konstanta učenja.

²⁴ S. Amari, S.C.Douglas, A. Chocki and H.H. Yang, "Multichannel Blind Deconvolution and Equalization Using the Natural Gradient," IEEE International Workshop on Wireless Communication, Paris 1997, pp. 101-104.

Višekanalna slijepa dekonvolucija

- Višekanalna slijepa separacija i dekonvolucija u vremenskom području
 - (+) adaptivna formulacija je ostvariva.
 - (-) spora konvergencija.
 - (-) obojeni signali se izbjeljuju u strukturama bez povratne veze (feedforward architecture).
 - (-) bijeljenje se može izbjeći u strukturama s povratnom vezom. No to onemogućava implementaciju nekauzalnih inverznih filtera nužnih za aproksimaciju stabilnog inverza NMF kanala.
- Višekanalna slijepa separacija i dekonvolucija u frekvencijskom području
 - (+) brža konvergencija zbog ortogonalnosti frekvencijskih uzoraka.
 - (+) uvjet za nekauzalnu implementaciju je prirodno zadovoljen kroz blok implementaciju.
 - (-) samo je blok-adaptivna implementacija moguća.
 - (-) permutacija na razini frekvencijskih uzoraka uzrokuje poteškoće kada signali trebaju biti transformirani u vremensko područje.
 - (-) računski zahtjevnija za implementaciju.

Rješenje VSD u frekvencijskom području

Matematička formulacija:

$$\mathbf{X} = \text{FFT}[\mathbf{x}]$$

$$\mathbf{W}_k(l+1) = \mathbf{W}_k(l) + [\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{Y}_k)\mathbf{Y}_k^H]\mathbf{W}_k(l)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{W}_k\mathbf{X}_k$$

$$\mathbf{y} = \text{IFFT}[\mathbf{Y}]$$

gdje k označava indeks frekvencijskog uzorka a l označava indeks iteracije. Permutacijska neodređenost je ozbiljan problem ako se VSD implementira kompletno u frekvencijskom području.

$$(\mathbf{W}_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} = \mathbf{P}_{k_1}\mathbf{\Lambda}_{k_1}) \neq (\mathbf{W}_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} = \mathbf{P}_{k_2}\mathbf{\Lambda}_{k_2})$$

Komponente na istim pozicijama u različitim frekvencijskim uzorcima ne pripadaju istom signalu. Nelinearna funkcija u frekvencijskom području može se koristiti kao ²⁵

$$\Phi_k(\mathbf{Y}_k) = \tanh(\eta|\mathbf{Y}_k|)e^{j\arg(\mathbf{Y}_k)}$$

²⁵H. Sawada, R. Mukai, S. Araki, S. Makino, "Polar Coordinate based Nonlinear Function for Frequency-Domain Blind Source Separation," IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E86-A, No. 3, March 2003.

Rješenje VSD u frekvencijskom području

Kombinirana implementacija u vremenskom i frekvencijskom području. Kompromisno rješenje je izvesti filtriranje u frekvencijskom području a računanje nelinearnosti-test nezavisnosti (što uzrokuje permutacijsku neodređenost) u vremenskom području^{26,27}

$$\mathbf{X} = \text{FFT}[\mathbf{x}]$$

$$\Phi_i(\mathbf{Y}_i) = \text{FFT}[\varphi(\mathbf{y}_i)]$$

$$\mathbf{W}_k(l+1) = \mathbf{W}_k(l) + \mu[\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{Y}_k)\mathbf{Y}_k^H]\mathbf{W}_k(l)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{W}_k\mathbf{X}_k$$

$$\mathbf{y}_i = \text{IFFT}(\mathbf{Y}_i)$$

gdje k označava indeks frekvencijskog uzorka, l označava indeks iteracije, i označava indeks signala a μ predstavlja konstantu učenja.

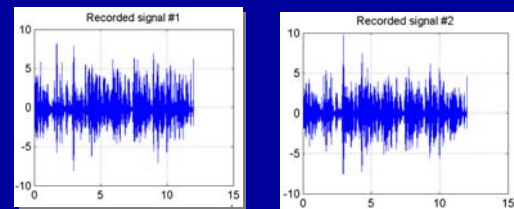
²⁶A. D. Beck, A.C. Tsoi, Proc. of the 1994 IEEE Workshop - Neural Networks for Signal Processing IV, p.565, ed. J. Vitorozos, J.N. Hwang, E. Wilson.

²⁷I.Kopriva, H. Szu, A.Persin, Optics Comm., Vol. 203 (3-6) pp. 197-211, 2002.

Primjena rješenja dinamičkog problema

Razdvajanje govornih signala u reverbilnoj akustičkoj okolini. Snimljeni signali su *skinuti* s: <http://home.socall.rr.com/russdsp>.

Signali su otkipani s 8kHz a sadrže istovremeni muški i ženski govor u trajanju od 12 sekundi.



Primjena rješenja dinamičkog problema

Parametri procesa separacije su dužina filtra L , Gaussov exponent θ , te konstanta učenja μ . Pri frekvenciji otkipavanja od 8kHz i dužini filtra od $L=1024$ uzorka, može se aproksimirati relativno kašnjenje od 64ms. Pri brzini zvuka u zraku od 330 ms^{-1} to korespondira s razlikom u putu od 21m. Slijedeći signali su rekonstruirani s $L=1024$, $\theta=1.0$ i $\mu=0.005$.

