Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

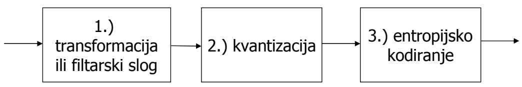
Teme predavanja

- Kompresija
- Pojasno kodiranje
  - Skalarna jednolika kvantizacija
  - Varijanca i distorzija uslijed kvantizacije pojaseva
  - Dobitak kodiranja
  - Optimalna raspodjela bitova
  - Cjelobrojni algoritam

2

Pojasno kodiranje

- Jedna od najznačajnijih primjena filtarskih slogova je kompresija.
- Blok shema sustava za kompresiju:

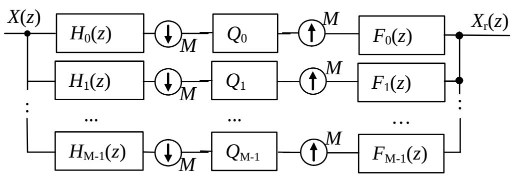


- 1.) razlaganje signala u pogodan ortonormalan skup funkcija. Cilj: zbijanje informacije.
- 2.) skalarna jednolika ili nejednolika, vektorska, prediktivna ili druga kvantizacija. Unosi gubitke.
- 3.) entropijsko kodiranje: bez gubitka informacije.

3

Pojasno kodiranje

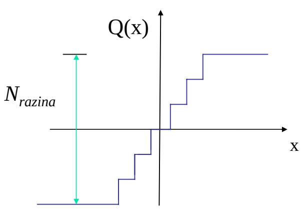
- Razložimo signal filtarskim slogom.
- Blok shema pojasnog kodiranja:



4

Skalarni ekvidistantni kvantizator

- Najvažniji segment: kvantizacija.
- Najjednostavnija varijanta: skalarni ekvidistantni kvantizator.



$$N_{razina} = 2^r$$

r – rezolucija u bitovima.

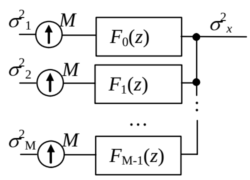
$$D = E\left[\in^2\right] = K \cdot \sigma_x^2 2^{-2r}$$

D – distorzija

K – konstanta ovisna o distribuciji signala

5

Pojasno kodiranje, varijanca



$$\sigma_x^2 = \sum_{k=1}^{M} w_k \cdot \sigma_k^2$$

$$w_k = \frac{1}{M}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2$$

- U ekvidistantnom ortonormalnom filtarskom slogu ukupna varijanca (šuma, signala) jednaka je srednjoj vrijednosti varijanci pojaseva.

6

Pojasno kodiranje, distorzija

- Svakom pojasu dodijelimo rezoluciju r_k.
- Ukupna distorzija D_{SBC} uslijed kvantizacije je:

$$D_{SBC} = \sum_{k=1}^{M} w_k D_k = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} D_k$$

Distorzija po pojasu

$$D_k = K \cdot \sigma_k^2 2^{-2r_k}$$

$$D_{SBC} = K \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 2^{-2r_k}$$

Srednja rezolucija:

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{M} w_k r_k = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} r_k$$

7

Pojasno kodiranje, dobitak

Distorzija uz pojasno kodiranje:

$$D_{SBC} = K \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 2^{-2r_k}$$

Distorzija bez pojasnog kodiranja:

$$D = K \cdot \sigma_x^2 2^{-2\bar{r}} = K \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 \cdot 2^{-2\bar{r}}$$

- Dobitak pojasnog kodiranja:

$$G_{SBC} = \frac{D}{D_{SBC}} = \frac{2^{-2\bar{r}}\sum_{k=1}^{M}\sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{M}\sigma_k^2 2^{-2r_k}}$$

Kako odabrati r_k da D_{SBC} bude minimalan, odnosno da dobitak G_{SBC} bude maksimalan?

8

Maksimalni G_{SBC}

$$G_{SBC} = \frac{2^{-2\bar{r}}\sum_{k=1}^{M}\sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{M}\sigma_k^2 2^{-2r_k}}$$

Tražimo r_k-ove za minimum nazivnika

- Uz odabranu srednju rezoluciju (srednji utrošak bitova) $\bar{r}$, te uz neki zadani signal x, možemo utjecati samo na nazivnik izraza (tj. na pojasne rezolucije r_k).

9

Optimalan izbor

- Iskoristit ćemo činjenicu da za bilo koje pozitivne brojeve a_k vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} a_k \geq \left(\prod_{k=1}^{M} a_k\right)^{\frac{1}{M}}$$

- Aritmetička sredina pozitivnih brojeva veća je ili jednaka geometrijskoj, a jednakost vrijedi ako su svi a_k međusobno jednaki.
- Mi ćemo odabrati: $a_k = \sigma_k^2 2^{-2r_k}$.

10

Optimalan izbor

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 2^{-2r_k} \geq \left(\prod_{k=1}^{M} \sigma_k^2 2^{-2r_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

- Desna strana nejednakosti je:

$$\left(\prod_{k=1}^{M}\sigma_k^2\right)^{\frac{1}{M}} \prod_{k=1}^{M} 2^{-\frac{2}{M}r_k} = \left(\prod_{k=1}^{M}\sigma_k^2\right)^{\frac{1}{M}} 2^{-\frac{2}{M}\sum_{k=1}^{M} r_k} = \rho^2 \cdot 2^{-2\bar{r}}$$

- ρ^2 je geometrijska sredina varijanci pojaseva.

$$\rho^2 = \left(\prod_{k=1}^{M}\sigma_k^2\right)^{\frac{1}{M}}$$

11

Minimum nazivnika D_{SBC}

- Jednakost (optimalan slučaj) vrijedi za:

$$\sigma_k^2 2^{-2r_k} = const = \rho^2 \cdot 2^{-2\bar{r}}$$

$$\sigma_k^2 2^{-2r_k} = \rho^2 \cdot 2^{-2\bar{r}} \quad \Big| \quad \log_2[.]$$

$$\log_2 \sigma_k^2 - 2r_k = \log_2 \rho^2 - 2\bar{r} \quad \Big| \quad \times(-1)$$

$$2r_k = \log_2 \sigma_k^2 - \log_2 \rho^2 + 2\bar{r}$$

$$r_k = \bar{r} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma_k^2}{\rho^2}$$

12

Optimalni r_k

- Pokazali smo da je optimalan izbor:

$$r_k = \bar{r} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma_k^2}{\rho^2} \qquad \rho^2 = \left(\prod_{k=1}^{M} \sigma_k^2\right)^{\frac{1}{M}}$$

- ρ^2 je geometrijska sredina varijanci pojaseva.
- Uz takav izbor, dobitak kodiranja iznosi:

$$G_{SBC} = \frac{2^{-2\bar{r}} \sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 2^{-2\bar{r}} \frac{\rho^2}{\sigma_k^2}} = \frac{\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2}{M\rho^2} = \frac{\overline{\sigma_k^2}}{\rho^2} = \frac{\text{aritmetička sredina}}{\text{geometrijska sredina}}$$

13

Pojasno kodiranje

$$r_k = \bar{r} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma_k^2}{\rho^2}\bigg|2^{[\cdot]} \qquad N_k = \bar{N} \cdot \frac{\sigma_k}{\rho} = const \cdot \sigma_k$$

- Broj razina kvantizacije N_k u svakom pojasu odabire se proporcionalno devijaciji σ_k.
- Dobitak kodiranja bit će najmanji uz podjednake σ_k (bijeli šum), a najveći kada se jako razlikuju.
- Za brojne korisne signale čiji spektar nije jednolik može se postići vrlo visok dobitak kodiranja.
- Problem: u izrazu za optimalne rezolucije se javljaju necijeli, a mogu se javiti i negativni r_k!

14

Cjelobrojni algoritam

- Ideja: uvećavati r_k bit po bit tako da u svakom koraku imamo najveće smanjenje distorzije.
- Takav algoritam je "pohlepan" i "kratkovidan", jer ne vodi računa o globalnom minimumu, već samo o najvećem trenutnom poboljšanju.
- Inicijalno se postavljaju svi $r_k=0$.
- Pronalazi se pojas s najvećom standardnom devijacijom σ_k i dodjeljuje mu se jedan bit: $r_k=r_k+1$.
- σ_k pripadnog pojasa se reducira na $\sigma_k/2$.
- Postupak se ponavlja dok se ne potroše raspoloživi bitovi ili dok se ne postigne po želji mala distorzija.

15

Teme predavanja

- Kompresija
- Pojasno kodiranje
  - Skalarna jednolika kvantizacija
  - Varijanca i distorzija uslijed kvantizacije pojaseva
  - Dobitak kodiranja
  - Optimalna raspodjela bitova
  - Cjelobrojni algoritam

16