

Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
<http://nmdos.zesoi.fer.hr>

Teme predavanja

- Filtarski slogovi s podizanjem
 - Podizanje u polifaznoj domeni
 - Rekonstrukcija u polifaznoj domeni
 - Kaskada koraka podizanja
- Ljestvičasta struktura
 - Konstrukcija interpolacijskih biortogonalnih filtarskih slogova.

2

Filtarski slogovi s podizanjem

- Neka je filtarski slog s dva pojasa i decimacijom zadan četvorkom filtera koja osigurava potpunu rekonstrukciju.
- Možemo konstruirati novi filtarski slog s potpunom rekonstrukcijom, pomoću *koraka podizanja* (engl. *lifting step*):

3

Filtarski slogovi s podizanjem

- Dodani korak podizanja utječe isključivo na niskopropusnu granu:

$S(z)$ djeluje na decimirani signal

$$H_{0new}(z) = H_0(z) - H_1(z) S(z^{-2})$$

- Pogodnim izborom $S(z)$ mogu se postići poboljšana, odnosno "podignuta" svojstva filtra u niskopropusnoj grani.

4

Filtarski slogovi s podizanjem

- Kako je polazni filtarski slog posedovao svojstvo potpune rekonstrukcije, na rekonstrukcijskoj je strani moguće izvršiti *inverzni korak podizanja*, koji se od početnog razlikuje samo predznakom:

5

Podizanje u polifaznoj domeni

- Novi filtarski slog svojom **strukturuom** osigurava potpunu rekonstrukciju signala, **bez obzira** na funkciju S .
- Štoviše, S može biti i vremenski promjenjiva ili čak nelinearna funkcija!
- Veza polifaznih matrica prije i nakon koraka podizanja može se izraziti sa:

$$\mathbf{H}_{Pnew}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}_P(z)$$

6

Podizanje u polifaznoj domeni

- To je lako provjeriti:

$$\mathbf{H}_P(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{P_{new}}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{00}(z) - S(z)H_{10}(z) & H_{01}(z) - S(z)H_{11}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}$$

- $H_1(z)$ se ne mijenja, dok $H_0(z)$:

$$H_{0_{new}}(z) = H_{00}(z^2) - H_{10}(z^2)S(z^2) + z^{-1}H_{01}(z^2) - z^{-1}H_{11}(z^2)S(z^2),$$

$$H_{0_{new}}(z) = H_0(z) - H_1(z)S(z^2).$$

7

Rekonstrukcija u polifaznoj domeni

$$\mathbf{H}_{P_{new}}(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\det=1} \cdot \mathbf{H}_P(z)$$

- Na rekonstrukcijskoj strani imamo:

$$\mathbf{F}_{P_{new}}(z) = \mathbf{H}_{P_{new}}^{-1}(z) = \mathbf{H}_P^{-1}(z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & +S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Što se slaže s već potvrđenom promjenom predznaka.

8

Korak podizanja u polifaznoj domeni

- Na rekonstrukcijskoj strani vrijedi:

$$\mathbf{F}_{P_{new}}(z) = \begin{bmatrix} F_{01}(z) & F_{11}(z) \\ F_{00}(z) & F_{10}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

...

$$F_{1_{new}}(z) = F_1(z) + F_0(z)S(z^2).$$

9

Poboljšanje visokopropusnog filtra: podizanje u drugoj grani

$$H_{1_{new}}(z) = H_1(z) + H_0(z)T(z^2) \quad F_{0_{new}}(z) = F_0(z) - F_1(z)T(z^2)$$

$$\mathbf{H}_{P_{new}}(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{bmatrix}}_{\det=1} \cdot \mathbf{H}_P(z) \quad \mathbf{F}_{P_{new}}(z) = \mathbf{F}_P(z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T(z) & 1 \end{bmatrix}$$

10

Kaskada koraka podizanja

- Za postizanje željenih svojstva, koraci podizanja mogu se izvoditi u kaskadi, na primjer u alternirajućem redoslijedu:

$$\mathbf{H}_{P_{new}}(z) = \left\{ \prod_{i=0}^{K-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_{K-i}(z) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -S_{K-i}(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \mathbf{H}_P(z)$$

$$\mathbf{F}_{P_{new}}(z) = \mathbf{F}_P(z) \cdot \prod_{i=1}^K \begin{bmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T_i(z) & 1 \end{bmatrix}$$

11

Ljestvičasta struktura

- Ideja: neka polazni filtri sasvim **nestanu**.
- Krećemo od lijenog waveleta, tj. polifazne dekompozicije signala.
- Alterniramo korake podizanja u oba smjera i postizemo željena svojstva filtra!

12

Ljestvičasta struktura

- Rezultat je ekvivalentan već izvedenoj kaskadi, samo što su polazne polifazne matrice **jedinične**.

$$\mathbf{H}_p(z) = \left\{ \prod_{i=0}^{K-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_{K-i}(z) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -S_{K-i}(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{F}_p(z) = \prod_{i=1}^K \begin{bmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T_i(z) & 1 \end{bmatrix}$$

13

Ljestvičasta struktura

- Prednosti ljestvičaste realizacije:
 - struktura jamči potpunu rekonstrukciju, čak i ako su filtri nelinearni i vremenski promjenjivi,
 - za filtre visokog reda broj operacija u odnosu na polifaznu realizaciju približno se **smanjuje na polovicu**,
 - kaskada omogućuje izvršavanje operacija **na istom memorijskom prostoru**.

14

Faktorizacija u ljestvičastu strukturu

- Pitanje: može li se svaki filtarski slog faktorizirati u korake podizanja?
- Odgovor: **DA**. Daubechies, Sweldens 98. g. predlažu euklidski algoritam (nećemo pokazivati).
- Primjer rotacijske matrice faktorizirane u 2 koraka podizanja + skaliranje ($\alpha \neq \pi/2$):

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin \alpha / \cos \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 / \cos \alpha \end{bmatrix}$$

15

Konstrukcija biortogonalnih filtarskih slogova interpolacijom

- Neka je prvi korak podizanja S prediktor kojim iz zadanog broja susjednih parnih uzoraka pokušavamo predvidjeti neparni uzorak.

- Korak podizanja S interpolacijski prediktor: $\hat{x}_o[k]$ predviđanje, $d[k]$ greška predikcije. E^{-1} operator jediničnog kašnjenja.

16

Konstrukcija biortogonalnih filtarskih slogova interpolacijom

Linearna interpolacija

Kubna interpolacija

17

Konstrukcija biortogonalnih filtarskih slogova interpolacijom

- U prvom slučaju vrijedi trapezna interpolacijska formula:

$$\hat{x}_o[k] = 1/2 \cdot (x_e[k-1] + x_e[k])$$
 i

$$d_{lin}[k] = x_o[k] - 1/2 \cdot (x_e[k-1] + x_e[k]),$$
- U drugom imamo kubnu interpolaciju:

$$d_{kub}[k] = x_o[k] - 1/16 \cdot (-x_e[k-2] + 9 \cdot x_e[k-1] + 9 \cdot x_e[k] - x_e[k+1]).$$
- To je dobro poznata shema interpolacije u 4 točke u CAGD literaturi (*engl. computer aided graphic design*).

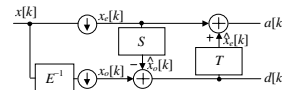
18

Interpolacijski filtri u Z domeni

- $S_{\text{lin}}(z) = 1/2 \cdot (1+z^{-1})$,
- $S_{\text{kub}}(z) = 1/16 \cdot (-z+9+9 \cdot z^{-1}-z^{-2})$,
- $H_{\text{lin}}(z) = z^{-1} \cdot S_{\text{lin}}(z^2) = 1/2 \cdot (-1+2 \cdot z^{-1}-z^{-2})$,
- $H_{\text{kub}}(z) = 1/16 \cdot (z^2-9+16 \cdot z^{-1}-9 \cdot z^{-2}+z^{-4})$.
- To su naši poznati VP filtri s dvije:
 - $H_{\text{lin}}(z) = -1/2 \cdot (-1+z^{-1})^2$,
 - odnosno četiri nultočke na $Z=1$:
 - $H_{\text{kub}}(z) = 1/16 \cdot (z^2+4 \cdot z+1) \cdot (-1+z^{-1})^4$.

19

Drugi korak podizanja interpolacijskog sloga



- Pokazuje se da za $T = 1/2 S$ dobivamo jednak broj nultočaka NP filtra na $z=-1$. Provjerite!
- Ovakva realizacija omogućuje jednostavnu konstrukciju rekonstrukcijske strane sloga običnom zamjenom predznaka.
- Nadalje, interpretacija $d[k]$ kao pogreške interpolacije polinomom jasno objašnjava svojstvo poništavanja polinoma.

20

Teme predavanja

- Filtarski slogovi s podizanjem
 - Podizanje u polifaznoj domeni
 - Rekonstrukcija u polifaznoj domeni
 - Kaskada koraka podizanja
- Ljestvičasta struktura
 - Konstrukcija interpolacijskih biortogonalnih filtarskih slogova.

21