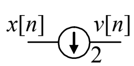
Napredne metode digitalne obrade signala

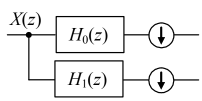
Doc. dr. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

Teme predavanja

- Polifazna reprezentacija filtarskog sloga
  - Polifazna dekompozicija signala i odziva filtra
  - Filtriranje i decimacija u polifaznoj domeni
  - Polifazna matrica
  - Rekonstrukcijska polifazna matrica
  - PR jednadžbe u polifaznoj domeni
- Rešetkasta struktura
  - ortogonalnog sustava,
  - sustava s linearnom fazom.

Decimacija za faktor 2

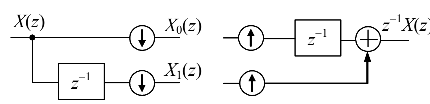




- Parne komponente signala ostaju, neparne nestaju.
- Originalni signal x razložen u 2 faze: parnu x_0 i neparnu x_1; uzimamo samo $v = x_0$.
- Decimacija nakon filtracije je neefikasna: računamo sve uzorke, a onda ih pola odbacimo!?

Polifazna dekompozicija

- Signal najprije razložimo u faze: na parnu i neparnu komponentu.

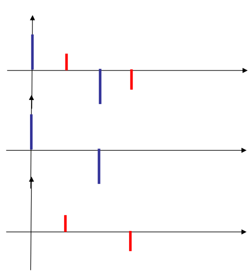


$$X(z) = X_0(z^2) + z^{-1}X_1(z^2)$$

- "Lijeni" filtarski slog s PR.

Primjer dekompozicije signala

$$X(z) = 2 + z^{-1} - 2z^{-2} - z^{-3} \qquad X(z) = X_0(z^2) + z^{-1}X_1(z^2)$$



$$X_0(z^2) = 2 - 2z^{-2}$$

$$z^{-1}X_1(z^2) = z^{-1} - z^{-3}$$

Polifazna dekompozicija

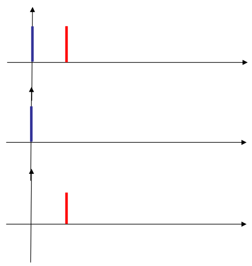
- Impulsni odziv filtara također razložimo na parnu i neparnu fazu.

$$H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1}H_{01}(z^2)$$

$$H_1(z) = H_{10}(z^2) + z^{-1}H_{11}(z^2)$$

Primjer dekompozicije H_0

$H_0(z) = 1 + z^{-1}$ $\quad$ $H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1}H_{01}(z^2)$



$H_{00}(z^2) = 1$

$z^{-1}H_{01}(z^2) = z^{-1}$

Polifazna dekompozicija

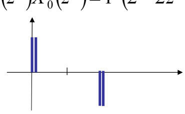
- Filtracija daje 4 komponente:

$$H_0(z)X(z) = \underbrace{H_{00}(z^2)X_0(z^2)}_{\text{parna komponenta odziva}} + \underbrace{z^{-1}H_{01}(z^2)z^{-1}X_1(z^2)}_{\text{parna komponenta odziva}}$$
$$\underbrace{H_{00}(z^2)z^{-1}X_1(z^2)}_{\text{neparna komponenta odziva}} + \underbrace{z^{-1}H_{01}(z^2)X_0(z^2)}_{\text{neparna komponenta odziva}}$$

- Nakon decimacije neparne komponente se odbacuju.
- U parnom dijelu odziva sudjeluju parna*parna i neparna*neparna komponenta filtra i pobude.

Primjer komponenti odziva

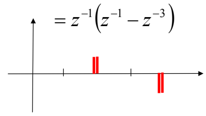
$H_{00}(z^2)X_0(z^2) = 1\cdot(2 - 2z^{-2})$



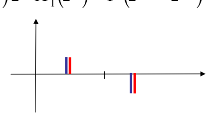
Parni dio odziva je zbroj

$\leftrightarrow$

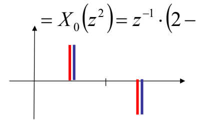
$z^{-1}H_{01}(z^2)z^{-1}X_1(z^2) = z^{-1}(z^{-1} - z^{-3})$



$H_{00}(z^2)z^{-1}X_1(z^2) = 1\cdot(z^{-1} - z^{-3})$



$z^{-1}H_{01}(z^2)X_0(z^2) = X_0(z^2) = z^{-1}\cdot(2 - 2z^{-2})$

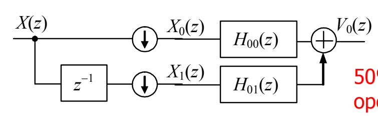


Filtriranje i decimacija u polifaznoj domeni

- Konačno, $(\downarrow 2)H_0 X$ računamo kao:

$$H_{00}(z)X_0(z) + z^{-1}H_{01}(z)X_1(z)$$

- Decimacija parnog dijela odziva odgovara zamjeni $z^2 \to z$.
- Dakle, efikasna realizacija $(\downarrow 2)H_0$ je:



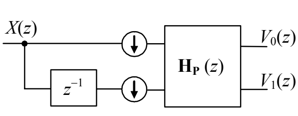
50% operacija!

Filtriranje i decimacija u polifaznoj domeni

- Za VP filtar $(\downarrow 2)H_1 X$ imamo:

$$H_{10}(z)X_0(z) + z^{-1}H_{11}(z)X_1(z)$$

- Djelovanje oba filtra prikazujemo jednim dijagramom:



$$\mathbf{H_P}(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}$$

Polifazna matrica, primjer

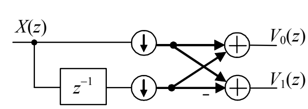
$$\mathbf{H_P}(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{H_P}(z)$ se naziva polifaznom matricom.
- Primjer:

$H_0(z) = 1 + z^{-1}$

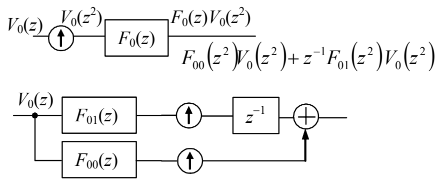
$H_1(z) = 1 - z^{-1}$

$$\mathbf{H_P}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Rekonstrukcijska polifazna matrica

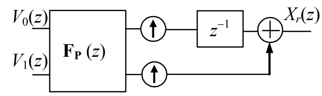
- Rekonstrukcijski NP filtar $F_0(z)$:



- Slično za VP filtar: $F_{10}(z^2)V_1(z^2)+z^{-1}F_{11}(z^2)V_1(z^2)$

Rekonstrukcijska polifazna matrica

- Na zajedničkom dijagramu grupiraju se grane s kašnjenjem:



$$X_r(z)=\begin{bmatrix} z^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{01}(z) & F_{11}(z) \\ F_{00}(z) & F_{10}(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0(z) \\ V_1(z) \end{bmatrix}$$

50% operacija!

Rekonstrukcijska polifazna matrica, primjer

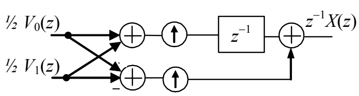
$$\mathbf{F_P}(z)=\begin{bmatrix} F_{01}(z) & F_{11}(z) \\ F_{00}(z) & F_{10}(z) \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{F_P}(z)$ je rekonstrukcijska polifazna matrica.
- Primjer:

$$F_0(z)=\frac{1}{2}\left(1+z^{-1}\right)$$

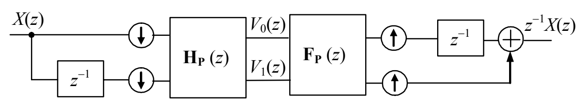
$$F_1(z)=\frac{1}{2}\left(-1+z^{-1}\right)$$

$$\mathbf{F_P}(z)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Uvjet potpune rekonstrukcije

- Sustav s potpunom rekonstrukcijom u polifaznoj domeni:



- Uvjet PR je vrlo kompaktno zapisan:

$$\mathbf{F_P}(z)\cdot\mathbf{H_P}(z)=\mathbf{I} \quad \text{ili} \quad z^{-L}\mathbf{I}$$

$$\mathbf{F_P}(z)=\mathbf{H_P^{-1}}(z)$$

Primjer jednostavnog PR sustava

$$\mathbf{H_P}(z)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F_P}(z)=\mathbf{H_P^{-1}}(z)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_0(z)=2+z^{-1} \qquad F_0(z)=-3+2z^{-1}$$

$$H_1(z)=3+2z^{-1} \qquad F_1(z)=2-z^{-1}$$

- Poznate veze četvorke filtara za uvjet PR je lako provjeriti.

Primjer PR sustava

$$\mathbf{H_P}(z)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 1-z^{-1} \\ 1-z^{-1} & 1+z^{-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F_P}(z)=\mathbf{H_P^{-1}}(z)$$

- Za inverziju matrice $\mathbf{H_P}(z)$ potrebna nam je determinanta, koja se javlja u nazivniku $\mathbf{F_P}(z)$.
- U našem primjeru: det $\mathbf{H_P}(z)$ = $2z^{-1}$.
- Da bi i rekonstrukcijski filtri bili FIR, očito determinanta mora biti oblika cz^{-L} !

Primjer PR sustava

$$F_{\mathbf{P}}(z) = \mathbf{H}_{\mathbf{P}}^{-1}(z) = \frac{1}{2z^{-1}} \begin{bmatrix} 1+z^{-1} & -1+z^{-1} \\ -1+z^{-1} & 1+z^{-1} \end{bmatrix}$$

- Rekonstrukcijski filtri su:

$$F_0(z) = F_{00}(z^2) + z^{-1} F_{01}(z^2) = \frac{1}{2z^{-1}} \left[\left(-1+z^{-2}\right) + z^{-1}\left(1+z^{-2}\right) \right]$$
$$F_0(z) = \frac{z}{2}\left(-1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\right)$$
$$F_1(z) = F_{10}(z^2) + z^{-1} F_{11}(z^2) = \frac{1}{2z^{-1}} \left[\left(1+z^{-2}\right) + z^{-1}\left(-1+z^{-2}\right) \right]$$
$$F_1(z) = \frac{z}{2}\left(1-z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\right)$$

- Uz kašnjenje z^{-1} dobivamo kauzalno rješenje.

Primjer PR sustava

- Za analizirajuće filtre treba nam $\mathbf{H}_{\mathbf{P}}(z)$:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{P}}(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 1-z^{-1} \\ 1-z^{-1} & 1+z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1} H_{01}(z^2) = \frac{1}{2} \left[\left(1+z^{-2}\right) + z^{-1}\left(1-z^{-2}\right) \right]$$
$$H_0(z) = \frac{1}{2}\left(1+z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}\right)$$
$$H_1(z) = H_{10}(z^2) + z^{-1} H_{11}(z^2) = \frac{1}{2} \left[\left(1-z^{-2}\right) + z^{-1}\left(1+z^{-2}\right) \right]$$
$$H_1(z) = \frac{1}{2}\left(1+z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}\right)$$

Primjer PR sustava

- Konačno imamo četvorku filtara:
- $H_0 = \frac{1}{2}\{\underline{1},1,1,-1\}$ $F_0 = \frac{1}{2}\{-\underline{1},1,1,1\}$,
- $H_1 = \frac{1}{2}\{\underline{1},1,-1,1\}$ $F_1 = \frac{1}{2}\{\underline{1},-1,1,1\}$;
- za koje je lako provjeriti da vrijede relacije za uvjet PR.
- Rekonstrukcijski filtri imaju zrcalno preokrenut impulsni odziv: očito, radi se o ortogonalnom sustavu.
- Matrice $\mathbf{H}_{\mathbf{P}}(z)$ i $\mathbf{F}_{\mathbf{P}}(z)$ su onda paraunitarne!

Primjer PR sustava, paraunitarnost

- Provjera paraunitarnosti $\mathbf{H}_{\mathbf{P}}(z)$:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{P}}^{T}(z^{-1}) \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{P}}(z) = c \cdot \mathbf{I}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+z & 1-z \\ 1-z & 1+z \end{bmatrix}^{T} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 1-z^{-1} \\ 1-z^{-1} & 1+z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Za ortogonalan sustav polifazne matrice $\mathbf{H}_{\mathbf{P}}(z)$ i $\mathbf{F}_{\mathbf{P}}(z)$ su paraunitarne.

Rešetkasta struktura

- Iz poznatih filtara lako je napisati pripadajuće polifazne matrice.
- S druge strane, možemo konstruirati polifaznu matricu željenih svojstava, najčešće kroz produkt jednostavnih matrica.
- Napravit ćemo konstrukciju polifazne matrice od tri faktora: Haarove matrice, matrice s kašnjenjem i matrice s 4 proizvoljna koeficijenta.

Rešetkasta struktura

$$\mathbf{H}_{\mathbf{p}}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Lako je pronaći rekonstrukcijsku matricu.
- Kako vrijedi $(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{ABC})=\mathbf{I}$, imamo:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{P}}^{-1}(z) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & z \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Za kauzalno rješenje biramo $\mathbf{F}_{\mathbf{P}}(z)=z^{-1}\mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{P}}(z)$.

Rešetkasta struktura

- Množenjem faktora dolazimo do:

$$\mathbf{H_p}(z)=\begin{bmatrix} a+cz^{-1} & b+dz^{-1} \\ a-cz^{-1} & b-dz^{-1} \end{bmatrix},$$

- a pripadni analizirajući filtri su:
- NP: $H_0 = \{\underline{a},b,c,d\}$, VP: $H_1 = \{\underline{a},b,-c,-d\}$.
- Dobili smo jednostavnu metodu projektiranja filtarskog sloga s filtrima dužine 4.
- Kaskadom sekcija postižemo željeni red FS.

Rešetkasta struktura i linearna faza

- NP: $H_0 = \{\underline{a},b,c,d\}$, VP: $H_1 = \{\underline{a},b,-c,-d\}$.
- Za simetriju impulsnog odziva biramo a=d, b=c.
- Rekonstrukcijski filtri su također simetrični:

$$\mathbf{H_p}(z)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \\ & z^{-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$F_\mathbf{P}(z)=z^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{P}^{-1}(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{a^2-b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} z^{-1} & \\ & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešetkasta struktura i ortogonalnost

- NP: $H_0 = \{\underline{a},b,c,d\}$, VP: $H_1 = \{\underline{a},b,-c,-d\}$.
- Za ortogonalan FS, tj. za paraunitarnu $\mathbf{H_P}(z)$, matrica [a,b;c,d] mora biti unitarna.
- Biramo d=a, c=-b i normiramo:

$$\mathbf{H_p}(z)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \\ & z^{-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F_P}(z)=z^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{P}^{-1}(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} z^{-1} & \\ & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešetkasta struktura i ortogonalnost

- Provjera unitarnosti:

$$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=$$

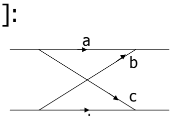
$$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zašto naziv “rešetkasta”?

$$\mathbf{H_p}(z)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \\ & z^{-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Već smo vidjeli da je Haarova polifazna matrica rešetkasto realizirana.
- Srednja matrica odgovara kašnjenju u drugoj grani.
- Matrica [a, b, c, d]:

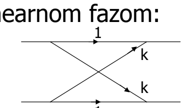
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$



Posebne rešetke

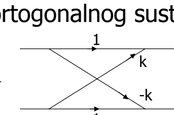
- Rešetka sustava s linearnom fazom:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix} \quad k=\frac{b}{a}$$



- Struktura jamči simetriju, a svodi se na samo 2 množenja (sa *a* i *k*) i 2 zbrajanja.
- Rešetkasta struktura ortogonalnog sustava:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix} \quad k=\frac{b}{a}$$



Rešetka ortogonalnog sustava

- Odaberemo li:

$$a = d = \cos\theta, \quad b = -d = \sin\theta; \quad a^2 + b^2 = 1.$$

- Dobivamo matricu rotacije

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix} \quad k = \tan\theta.$$

- Pokazuje se da se polifazna matrica svakog paraunitarnog filtarskog sloga može prikazati kao kaskada (tj. produkt) ovakvih rotirajućih članova.

Primjer

- Odaberemo li $\theta = \pi/4$ slijedi:

$$a = d = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = -d = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Dobivamo permutiranu Haarovu matricu:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teme predavanja

- Polifazna reprezentacija filtarskog sloga
  - Polifazna dekompozicija signala i odziva filtra
  - Filtriranje i decimacija u polifaznoj domeni
  - Polifazna matrica
  - Rekonstrukcijska polifazna matrica
  - PR jednadžbe u polifaznoj domeni
- Rešetkasta struktura
  - ortogonalnog sustava,
  - sustava s linearnom fazom.