Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

Teme predavanja

- Wavelet filtarski slogovi
- Wavelet funkcija i funkcija skale
- Brza oktavna DWT
- Analiza signala DWT slogom
  - Frekvencijska analiza
  - Detekcija diskontinuiteta
  - Poništavanje polinoma
- Potiskivanje šuma metodom praga i druge primjene.

2

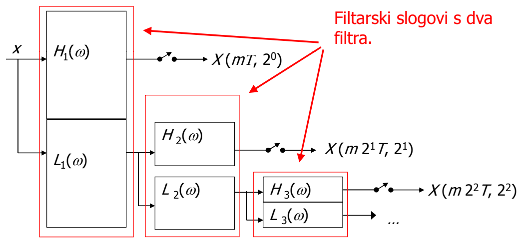
Wavelet filtarski slogovi

- Naučili smo projektirati biortogonalne i ortogonalne maksimalno decimirane filtarske slogove s potpunom rekonstrukcijom.
- Pitanje: mogu li se takvi slogovi iskoristiti za realizaciju oktavne DWT vremenski diskretnih signala?

3

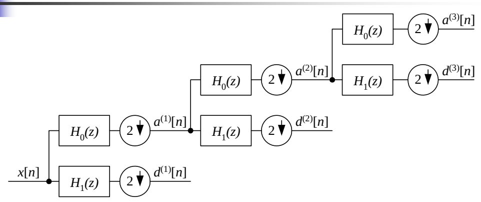
Oktavna DWT kao slog filtara

- Rekurzivna realizacija



4

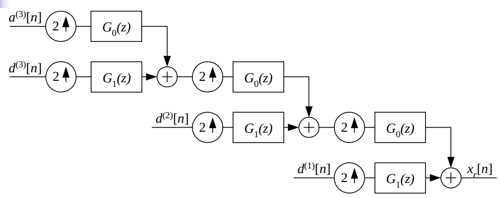
Wavelet stablo, analiza



- Rekurzivno izračunavanje koeficijenata DWT wavelet filtarskim stablom.
- Razlaganje se ponavlja u niskopropusnoj grani.

5

Wavelet stablo, rekonstrukcija

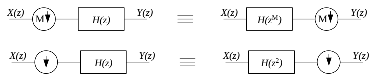


- Rekurzivna rekonstrukcija signala wavelet filtarskim stablom.
- Ako je svaki filtarski slog s PR, jasno je i da je cijeli sustav s potpunom rekonstrukcijom.

6

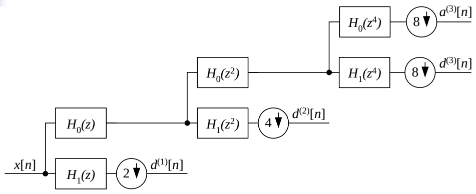
Funkcije razlaganja

- Pitanje je koje su funkcije razlaganja u wavelet filtarskom stablu i koja je veza s DWT transformacijom?
- U stablu se javlja kaskada decimatora i filtara.
- Zamjena redoslijeda rezultira sljedećim relacijama (*eng. Noble Identities*):



7

Wavelet stablo, analiza



- U N-toj razini imamo sljedeće kaskade filtara:

$$H_0^{(N)}(z)=\prod_{i=0}^{N-1}H_0(z^{2^i}) \qquad H_1^{(N)}(z)=H_1(z^{2^{N-1}})\prod_{i=0}^{N-2}H_0(z^{2^i})$$

8

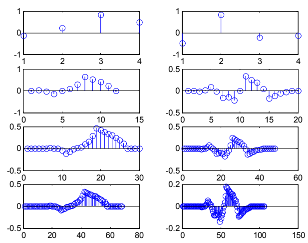
Wavelet stablo, analiza

$$H_1^{(N)}(z)=H_1(z^{2^{N-1}})\prod_{i=0}^{N-2}H_0(z^{2^i}) \qquad H_0^{(N)}(z)=\prod_{i=0}^{N-1}H_0(z^{2^i})$$

- Filtri $H_1^{(N)}$ određuju funkcije razlaganja u različitim razinama wavelet stabla ("wavelet funkcije").
- Filtri $H_0^{(N)}$ određuju njima komplementarne funkcije razlaganja ("funkcije skale").
- Pogledat ćemo primjer.

9

Analizirajući filtri db2 u četiri razine razlaganja



- U višim razinama razlaganja impulsni odziv filtara zadržava "isti oblik", ali ima približno dvostruko trajanje.

10

Wavelet funkcija i funkcija skale

- Definiramo kontinuirane funkcije, koje su po odsječcima jednake impulsnim odzivima filtara.

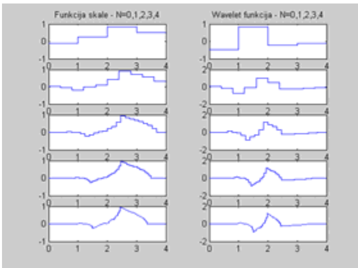
$$\varphi_N(t)=2^{N/2}h_{0N}[n], \qquad \frac{n}{2^N}\le t<\frac{n+1}{2^N},$$

$$\psi_N(t)=2^{N/2}h_{1N}[n], \qquad \frac{n}{2^N}\le t<\frac{n+1}{2^N}.$$

- Ovako definirane kontinuirane funkcije su normirane po vremenu i energiji.

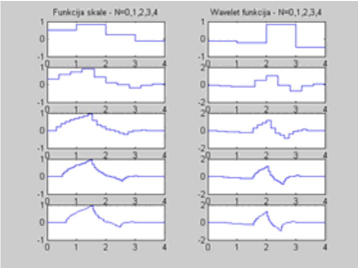
11

db2: konvergencija analizirajuće funkcije skale i wavelet funkcije



12

db2: konvergencija rekonstrukcijskih funkcija



13

Wavelet funkcija i funkcija skale za db2

- Pridružene kontinuirane funkcije konstantne po odsječcima konvergiraju ako broj razina razlaganja *N* teži u beskonačno.
- U našem primjeru rezultirajuće funkcije su zadovoljavajuće glatke (regularne).
- Uvjet realizacije DWT diskretnih signala filtarskim slogom: konvergencija i regularnost pridruženih wavelet funkcija i funkcija skale kada broj razina razlaganja teži u beskonačnost.

14

Nužni i dovoljni uvjeti

- Pokazuje se da je za konvergenciju nužna nultočka niskopropusnog filtra $H_0(z)$ na $z=-1$, te vrijednost $\sqrt{2}$ na $z=1$:

$$H_0(z)\big|_{z=-1}=0, \quad H_0(z)\big|_{z=1}=\sqrt{2};$$

- Dovoljan uvjet (Mallat 89) je da NP filtar nema nultočaka na jediničnoj kružnici u rasponu od $-\pi/2$ do $\pi/2$.

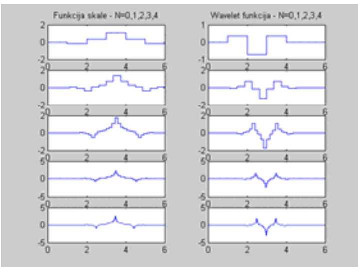
15

Nužni i dovoljni uvjeti

- Kod ortogonalnih slogova rekonstrukcijske funkcije su zrcalno preokrenute analizirajuće.
- Kod biortogonalnih slogova rekonstrukcijske funkcije redovito su sasvim različite od analizirajućih.
- Za brojne primjene (kompresija, potiskivanje šuma, ...) važnija nam je regularnost rekonstrukcijskih funkcija.

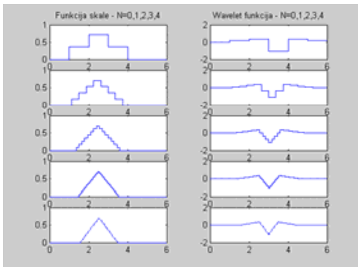
16

bior2.2: konvergencija analizirajuće funkcije skale i wavelet funkcije



17

bior2.2: konvergencija rekonstrukcijskih funkcija



18

Analizirajuća strana: filtarski koeficijenti i funkcije

- Neka funkcija skale i wavelet funkcija konvergiraju:

$$\varphi(t) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(t), \qquad \psi(t) = \lim_{N\to\infty} \psi_N(t).$$

- Vrijede sljedeće veze s filtarskim koeficijentima:

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_0} h_0[k]\,\varphi(2t-k) \qquad \psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,\varphi(2t-k)$$

- Provjerit ćemo na primjeru.

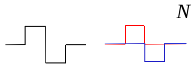
19

Analizirajuća strana: filtarski koeficijenti i funkcije

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_0} h_0[k]\,\varphi(2t-k) \qquad \psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,\varphi(2t-k)$$

- Primjer (Haarov wavelet):

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \le t \le 1 \\ 0 & drugdje \end{cases}$$

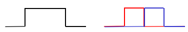


$N = 2$

$h_1 = \{1, -1\}/\sqrt{2}$

$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1)$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & drugdje \end{cases}$$



$h_0 = \{1, 1\}/\sqrt{2}$

$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1)$

20

Brza oktavna DWT

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^k}}\psi\left(\frac{t}{2^k} - m\right), \quad X[m,k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\psi_{m,k}(t)\,dt$$

- Neka je $\Psi(t)$ wavelet funkcija (limes $\Psi_N(t)$), te neka je $\varphi(t)$ pripadna funkcija skale.
- Krenemo računanje na primjer od razine $k=0$:

$$A[m,0] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\varphi(t-m)\,dt$$

- $A[m,k]$ zovemo aproksimacijskim koeficijentima.

21

Brza oktavna DWT

- Kako je slijedi:

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,\varphi(2t-k)$$

$$\psi\left(\frac{t}{2} - m\right) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,\varphi(t-k-2m)$$

$$X[m,1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,\varphi(t-k-2m)\,dt$$

$$X[m,1] = \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,A[2m+k,0]$$

- Ovo odgovara filtriranju koeficijenata $A[m, 0]$ preokrenutim filtrom h_1, te decimaciji s faktorom 2.

22

Brza oktavna DWT

- Iz slijedi:

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_0} h_0[k]\,\varphi(2t-k)$$

$$A[m,1] = \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k]\,A[2m+k,0]$$

- Filtriranje s preokrenutim h_0 i decimacija.
- Konačno, imamo postupak za brzu DWT:
  - 1.) integriranjem signala pomnoženog s pomaknutim funkcijama izračunavamo aproksimacijske koeficijente $A[m,k_0]$.
  - 2.) Za dobivanje $X[m,k]$ za $k > k_0$ aproksimacijske koeficijente propustimo kroz wavelet filtarski slog!

23

Brza oktavna DWT

- Brzo izračunavanje i rekonstrukciju DWT koeficijenata filtarskim slogom nazivamo i piramidalnim algoritmom.
- Primjer Haarova DWT:
  - Napraviti primjer na ploči i u MATLAB-u.
  - Na ploči koeficijente računati direktno.
  - Ilustrirati sukcesivnu aproksimaciju pri rekonstrukciji signala.

24

Zaključci

- Wavelet filtarski slog možemo koristiti za brzo računanje DWT.
- S druge strane, postupak dizajna filtarskog sloga možemo promatrati kao metodu projektiranja ortogonalnih ili biortogonalnih waveleta konačnog trajanja.

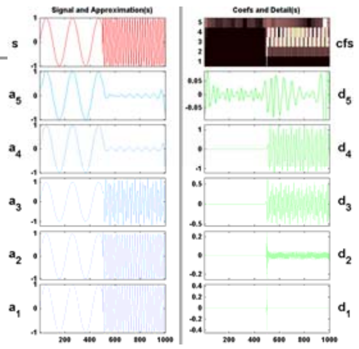
25

Analiza signala DWT slogom

- Napravit ćemo analizu više signala različitim DWT slogovima.
- Prvi primjer: signal je složen od dva sinusa različitih frekvencija.
- Analiza:
  - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom db4.
  - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom sym4.
  - Haarovim wavelet filtarskim slogom.

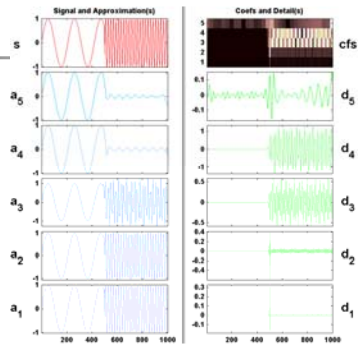
26

- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: db4
- Lijevo: izlazi iz NP filtara u 5 razina ("aproksimacije").
- Desno: izlazi iz VP filtara u 5 razina (wavelet koeficijenti ili "detalji").



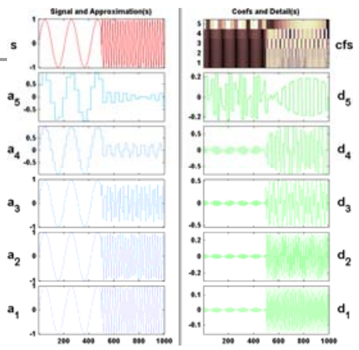
27

- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: sym4
- Ortogonalno razlaganje uz najmanje nesimetrične funkcije daje nešto bolji opis.



28

- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: Haar.
- Razlaganje sinusnog signala u wavelete konstantne po odsječcima ne daje dobar opis.



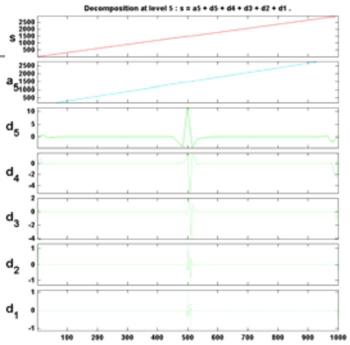
29

Analiza polinoma DWT slogom

- Drugi primjer: signal je složen od dva polinoma (ovdje pravca različitih nagiba).
- Analiza:
  - biortogonalnim wavelet filtarskim slogom bior2.2
    - Zapis bior$m.n$ znači m nultočaka rekonstrukcijskog filtra F_0 i n nultočaka analizirajućeg filtra H_0 na frekvenciji $\omega = \pi$.

30

- Signal: dva pravca.
- Wavelet: bior2.2
- Wavelet s m=2 poništava polinome drugog reda.
- Rezultat: pravci u a_5, diskontinuitet u wavelet koeficijente d_1-d_5.



31

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Krenimo od biortogonalnog filtarskog sloga i promatrajmo rekonstrukcijski NP filtar F_0.
- Neka F_0 ima m nultočaka na Nyquistovoj frekvenciji $\omega = \pi$.
- Onda vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n n^j f_0[n] = 0 \quad za \quad j = 0,1,\dots,m$$

32

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- m nultočaka od F_0 na $\omega = \pi$ znači:

$$F_0(\omega)\big|_{\omega=\pi} = F_0'(\omega)\big|_{\omega=\pi} = \dots = F_0^{(m-1)}(\omega)\big|_{\omega=\pi} = 0.$$

- Napišemo izraze za spektar i njegove derivacije na $\omega = \pi$:

$$F_0(\omega)\big|_{\omega=\pi} = \sum f_0[n] e^{-j\pi n} = \sum f_0[n](-1)^n,$$

$$F_0'(\omega)\big|_{\omega=\pi} = \sum f_0[n](-jn) e^{-j\pi n} = \sum f_0[n](-jn)(-1)^n,$$

$\dots$

Izjednačavanje svih izraza s nulom daje rezultat s prethodnog slajda.

33

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Filtar F_0 određuje analizirajući VP filtar H_1:

$$h_1[n] = (-1)^n \cdot f_0[n]$$

- pa imamo:

$$\sum_{n=0}^{m} n^j h_1[n] = 0 \quad za \quad j = 0,1,\dots,m$$

- Analizirajuća wavelet funkcija $\psi(t)$ nastaje kaskadnim algoritmom iz h_1, stoga se može pokazati:

$$\int t^j \psi(t)\, dt = 0 \quad za \quad j = 0,1,\dots,m$$

34

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Wavelet funkcija $\psi(t)$ ima m nul-momenata (*eng. vanishing moments*).
- Ako je analizirani signal polinom m-tog reda, wavelet koeficijenti će redom biti jednaki nuli.
- Takvo wavelet razlaganje poništava (*eng. annihilates*) polinome: informacija se prenosi isključivo u aproksimacijskim koeficijentima.
- Kako se svaka glatka funkcija može predstaviti polinomom u nekoj okolini, ovo je izuzetno važno svojstvo za koncentriranje informacije.

35

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Zaključak:
  Wavelet razlaganje je dobro za opis signala sastavljenih od odsječaka glatkih funkcija.
- Takvi su mnogi realni signali i slike!

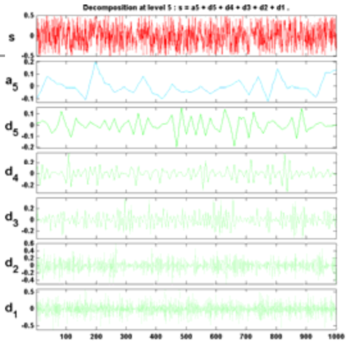
36

Analiza šuma DWT slogom

- Treći primjer: signal je bijeli šum.
- Analiza:
  - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom.

37

- Signal: bijeli šum.
- Wavelet: db3
- Šum se distribuira po wavelet koeficijentima u svim razinama razlaganja.



38

Potiskivanje šuma

- Četvrti primjer: signal je sastavljen od odsječaka polinoma s pribrojenim bijelim šumom.
- Analiza:
  - wavelet filtarskim slogom bez decimacije.

39

Potiskivanje šuma

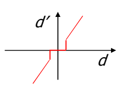
- Korisni signal sastavljen od odsječaka polinoma ili glatkih funkcija će se preslikati u mali broj wavelet i aproksimacijskih koeficijenata velike vrijednosti.
- Bijeli šum će se distribuirati po svim wavelet koeficijentima.

40

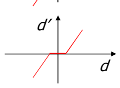
Potiskivanje šuma

- Ideja (dvije varijante):
  - Odbaciti wavelet koeficijente ispod nekog praga (*eng. hard thresholding*)
  - Odbaciti wavelet koeficijente ispod praga a ostale umanjiti za iznos praga (*eng. soft thresholding*).

$$d'[n] = \begin{cases} d[n] & |d[n]| > \varepsilon, \\ 0 & |d[n]| \le \varepsilon. \end{cases}$$



$$d'[n] = \begin{cases} \operatorname{sgn}(d[n])\left(|d[n]| - \varepsilon\right) & |d[n]| > \varepsilon, \\ 0 & |d[n]| \le \varepsilon. \end{cases}$$

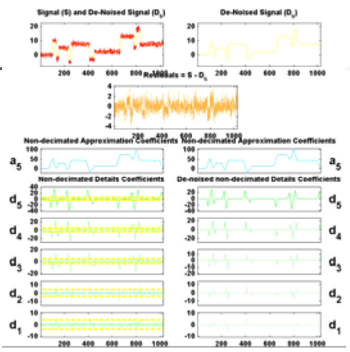


41

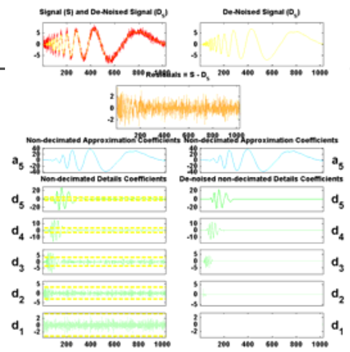
Potiskivanje šuma

- Prag se odabire tako da se potisne većina šuma.
- Prva varijanta daje manju pogrešku pri rekonstrukciji signala u smislu najmanjih kvadrata.
- Druga je redovito bolja u primjenama, osobito kod potiskivanja šuma u slici jer nema naglih skokova u vrijednosti koeficijenata.
- Bolje rezultate se postiže wavelet filtarskim slogom bez decimacije.

42



43

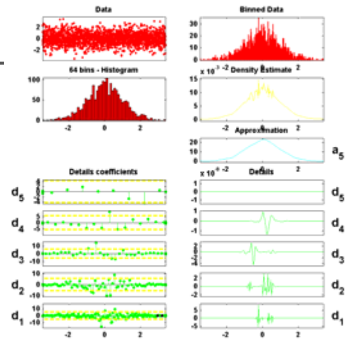


44

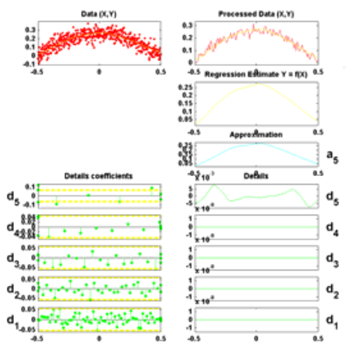
Druge primjene

- Metoda praga može se koristiti i za brojne druge primjene.
- Procjena funkcije gustoće vjerojatnosti
  - Na podacima iz histograma napravi se wavelet analiza, a metodom praga rezultati se učine glatkim.
- Wavelet regresija
  - Umjesto polinomom, funkcijska ovisnost se aproksimira wavelet funkcijama.

45



46



47

Teme predavanja

- Wavelet filtarski slogovi
- Wavelet funkcija i funkcija skale
- Brza oktavna DWT
- Analiza signala DWT slogom
  - Frekvencijska analiza
  - Detekcija diskontinuiteta
  - Poništavanje polinoma
- Potiskivanje šuma metodom praga i druge primjene.

48