Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

Teme predavanja

- Paraunitarnost
- Ortogonalni filtarski slogovi
- Spektralna faktorizacija
- Primjeri dizajna

2

Konstrukcija unitarne matrice

- Za unitarnu matricu vrijedi:

$$\mathbf{A}^{T*} \cdot \mathbf{A} = c \cdot \mathbf{I} \qquad \text{za neki } c > 0.$$

- Vidjeli smo da transformacija signala takvom matricom čuva energiju signala.
- Konstruirajmo jednu unitarnu matricu 2x2.
- Neka je A(1,1) = cos(θ).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$$

- Ako je c =1, onda je A(2,1) = sin(θ).

3

Konstrukcija unitarne matrice

- Stupci moraju biti ortogonalni, pa slijedi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

- Dobili smo matricu rotacije za koju vrijedi:

$$\mathbf{A}^{T*} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

- Matrica A će ostati unitarna i ako joj neki od stupaca i/ili redaka pomnožimo sa -1.
- Nadalje, ako dozvolimo i kompleksne članove matrice, stupce i/ili retke možemo množiti sa:

$$z \in C, \quad |z| = 1.$$

4

Definicija paraunitarne matrice

- Svojstva filtarskog sloga u Z domeni opisuje modulacijska matrica.
- Članovi modulacijske matrice su funkcije kompleksne varijable z.
- Definicija: matrica **P**(z) je paraunitarna, ako je unitarna za vrijednosti z na jediničnoj kružnici (|z|=1).

$$|z| = 1,\, z \in C \quad \leftrightarrow \quad z = e^{j\omega},\, \omega \in R$$

$$\mathbf{P}^{*T}\left(e^{j\omega}\right) \cdot \mathbf{P}\left(e^{j\omega}\right) = c \cdot \mathbf{I}$$

5

Definicija paraunitarne matrice

$$\mathbf{P}^{*T}\left(e^{j\omega}\right) \cdot \mathbf{P}\left(e^{j\omega}\right) = c \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{P}^{T}\left(e^{-j\omega}\right) \cdot \mathbf{P}\left(e^{j\omega}\right) = c \cdot \mathbf{I}$$

- Odnosno, za svaki $z \neq 0$:

$$\mathbf{P}^{T}\left(z^{-1}\right) \cdot \mathbf{P}(z) = c \cdot \mathbf{I}$$

- Filtarski slog kojem je analizirajuća modulacijska matrica paraunitarna čuva energiju signala i nazivamo ga ortogonalnim.

6

Paraunitarna modulacijska matrica

- Ako je $\mathbf{H}_m$ paraunitarna (uz $c=2$) vrijedi:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z^{-1}) & H_1(z^{-1}) \\ H_0(-z^{-1}) & H_1(-z^{-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m^T(z^{-1})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m(z)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Izraz je uvjet PR za filtarski slog bez kašnjenja, a prvu matricu prepoznajemo kao sintetizirajuću $\mathbf{F}_m$, odnosno:

$$F_0(z) = H_0(z^{-1}) \qquad F_1(z) = H_1(z^{-1})$$

7

Uvjeti ortogonalnosti

$$F_0(z) = H_0(z^{-1}), \qquad F_1(z) = H_1(z^{-1})$$

- Zamjena $z \to z^{-1}$ odgovara preokretanju uzoraka impulsnog odziva u vremenskoj domeni: $f_0[n] = h_0[-n]$, $f_1[n] = h_1[-n]$.
- Za poništenje aliasinga odabrali smo:

$$F_0(z) = H_1(-z), \qquad F_1(z) = -H_0(-z)$$

- Konačno, uvjet PR ortogonalnog sloga bez kašnjenja glasi:

$$H_0(z^{-1}) \cdot H_0(z) - H_0(-z^{-1}) \cdot H_0(-z) = 2.$$

8

Uvjeti ortogonalnosti

$$P(z) = H_0(z^{-1}) \cdot H_0(z).$$

- Očito, za ortogonalni filtarski slog potrebno je polupojasni produkt filtar $P(z)$ faktorizirati u faktore $H_0(z^{-1})$ i $H_0(z)$.
- Često se uvjet PR ortogonalnog filtarskog sloga izražava u spektralnoj domeni:

$$H_0(e^{-j\omega}) \cdot H_0(e^{j\omega}) - H_0(e^{-j\omega - j\pi}) \cdot H_0(e^{j\omega + j\pi}) = 2,$$
$$\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 + \left|H_0(e^{j(\omega+\pi)})\right|^2 = 2.$$

9

Spektralna faktorizacija

$$P(e^{j\omega}) = H_0(e^{-j\omega}) \cdot H_0(e^{j\omega}) = \left|H_0(e^{j\omega})\right|^2$$

- To je izraz za polupojasni filtar u spektralnoj domeni.
- Postupak pronalaženja odgovarajućeg $H_0(e^{-j\omega})$ iz $P(e^{-j\omega})$ naziva se spektralna faktorizacija.
- Pokazuje se da rješenje postoji za $P(e^{-j\omega}) \geq 0$.
- Uvjet je ispunjen za polupojasne filtre.
- Postupak spektralne faktorizacije nije jednostavan, a više predloženih metoda može se pronaći u literaturi.

10

Primjer faktorizacije

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^{2p} Q_{2p-2}(z).$$

- Neka je $P_0(z)$ maksimalno gladak binomni filtar.
- Za sustav bez kašnjenja imamo:

$$P(z) = z^p (1 + z^{-1})^{2p} z^{p-1} Q_{2p-2}(z).$$

- Binomni dio je lako faktorizirati, jer su nultočke na jediničnoj kružnici, a potencija binoma je parna: $(1 + z^{-1})^p \cdot (1 + z)^p$

11

Primjer faktorizacije

- Polinom $Q(z)$ uvijek sadrži parove nultočaka:

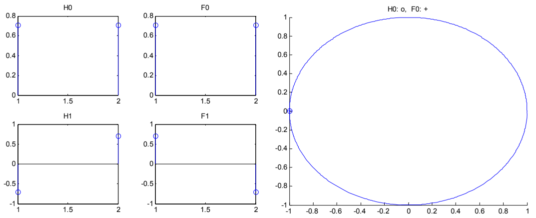
$$z_1 = re^{j\theta}, \quad z_2 = \frac{1}{r} e^{j\theta}.$$

- Sjetimo se primjera s predavanja i vježbi (za $p = 2$ i 3)!
- Ortogonalna faktorizacija zahtjeva razdvajanje recipročnih nultočaka u različite faktore.
- Stoga orto filtri za $p > 1$ ne mogu biti simetrični.
- Daubechies izbor: $F_0(z)$ s nultočkama unutar jedinične kružnice (filtar najmanje faze).

12

Daubechies, db1

P=1

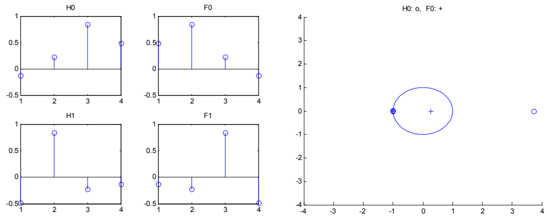


- Lijevo: impulsni odzivi, desno: nultočke $H_0(z)$ i $F_0(z)$.

13

Daubechies, db2

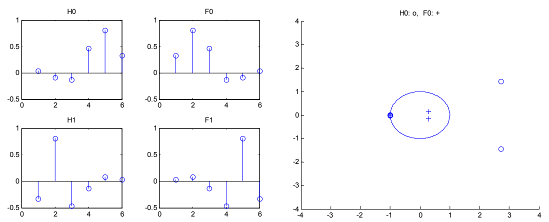
P=2



- Lijevo: impulsni odzivi, desno: nultočke $H_0(z)$ i $F_0(z)$.

14

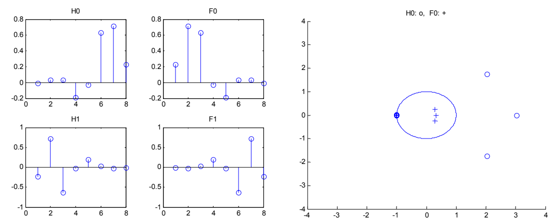
Daubechies, db3



- Lijevo: impulsni odzivi, desno: nultočke $H_0(z)$ i $F_0(z)$.

15

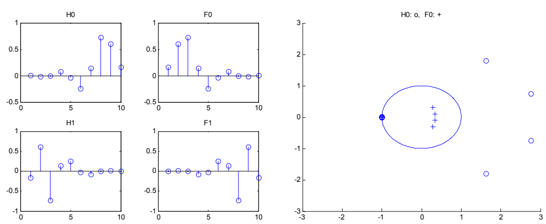
Daubechies, db4



- Lijevo: impulsni odzivi, desno: nultočke $H_0(z)$ i $F_0(z)$.

16

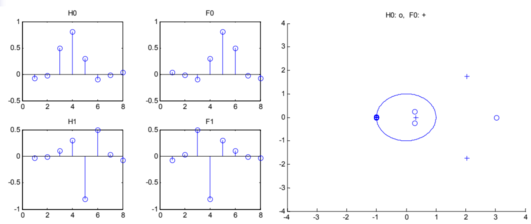
Daubechies, db5



- Lijevo: impulsni odzivi, desno: nultočke $H_0(z)$ i $F_0(z)$.

17

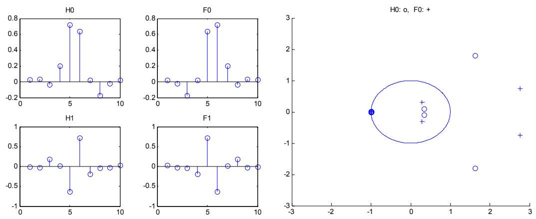
Najmanje asimetričan: sym4



- Lijevo: impulsni odzivi, desno: nultočke $H_0(z)$ i $F_0(z)$.
- Drugačija faktorizacija daje simetričniji imp. odziv!

18

Najmanje asimetričan: sym5



- Lijevo: impulsni odzivi, desno: nultočke $H_0(z)$ i $F_0(z)$.
- Drugačija faktorizacija daje simetričniji imp. odziv!

19

Druga rješenja

- $Q(z)$ višeg reda od minimalnog $2p$-2 radi postizanja željenih svojstava filtara (Coifman, …).
- Simetrični ortogonalni filtri s približno "potpunom" rekonstrukcijom (Saramaki, …).
- Biortogonalni filtri željenih svojstava (Vetterli, Unser, …).

20

Teme predavanja

- Paraunitarnost
- Ortogonalni filtarski slogovi
- Spektralna faktorizacija
- Primjeri dizajna

21