Napredne metode digitalne obrade signala

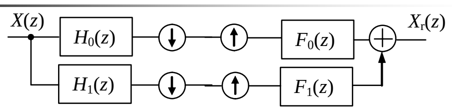
Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

Teme predavanja

- Dizajn biortogonalnih filtarskih slogova
- Produkt filtar, polupojasni filtar, maksimalno gladak filtar
- Primjeri dizajna
- Uvjet potpune rekonstrukcije za filtarski slog sa M pojaseva

2

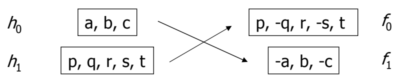
Dizajn filtarskog sloga sa PR



- Uvjeti PR: $F_0(z)\cdot H_0(z)+F_1(z)\cdot H_1(z)=2z^{-L}, \quad (1)$

  $F_0(z)\cdot H_0(-z)+F_1(z)\cdot H_1(-z)=0. \quad (2)$
- Odabir: (zbog 2) $F_0(z)=H_1(-z), \quad F_1(z)=-H_0(-z)$

  $f_0[n]=(-1)^n\cdot h_1[n], \quad f_1[n]=-(-1)^n h_0[n]$



3

Dizajn filtarskog sloga sa PR

- Označimo li produkt filtre:

  $P_0(z)=F_0(z)\cdot H_0(z), \quad P_1(z)=F_1(z)\cdot H_1(z),$
- imamo uvjet PR: $P_0(z)-P_0(-z)=2z^{-L}.$
- Neka je P_0 niskopropusni, a P_1 visokopropusni produkt filtar.
- Koraci projektiranja:
  - dizajn NP filtra P_0 koji zadovoljava gornji uvjet,
  - faktorizacija P_0 u $F_0 H_0$. Korištenjem odabranih izraza za poništenje (2) → izračunavanje F_1 i H_1.

4

Dizajn NP filtra P_0

$P_0(z)=F_0(z)\cdot H_0(z), \qquad P_0(z)-P_0(-z)=2z^{-L}.$

- Red filtra P_0 određuje sumu redova filtara F_0 i H_0.
- Ako se radi o FIR filtrima, dužina impulsnog odziva P_0 je zadana sumom dužina F_0 i H_0.
- Postoje brojni načini za dizajn P_0.
- Uočimo važno svojstvo $P_0(z)$: sve neparne potencije od z imaju koeficijente jednake nuli, osim uz z^{-L} gdje je koeficijent jednak jedan.

5

Dizajn NP filtra P_0

- Napravit ćemo primjer.
- Neka je P_0 FIR filtar dužine 6.

$$P_0(z)=p_0[0]+p_0[1]z^{-1}+p_0[2]z^{-2}+p_0[3]z^{-3}+p_0[4]z^{-4}+p_0[5]z^{-5}$$
$$P_0(-z)=p_0[0]-p_0[1]z^{-1}+p_0[2]z^{-2}-p_0[3]z^{-3}+p_0[4]z^{-4}-p_0[5]z^{-5}$$
$$P_0(z)-P_0(-z)=0+2p_0[1]z^{-1}+0+2p_0[3]z^{-3}+0+2p_0[5]z^{-5}=2z^{-L}$$

- Uz L=3, slijedi:

  $p_0[1]=0, \quad p_0[3]=1, \quad p_0[5]=0.$

6

Dizajn NP filtra P_0

- Očito, parne potencije nedostaju u izrazu $P_0(z)-P_0(-z)$; znači, radi se o neparnoj funkciji.
- Očito, L je neparan.
- Zgodniji oblik možemo dobiti ako normiramo (pomnožimo) $P_0(z)$ sa z^L kako bi ga centrirali:

$$P(z)=z^L P_0(z),$$
$$P(-z)=(-z)^L P_0(-z) \quad =-z^L P_0(-z),$$

- jer je L neparan.

7

Polupojasni filtar

- Konačno, uvjet PR glasi:

$$P(z)+P(-z)=2.$$

- Takav P se naziva "polupojasnim filtrom".
- Sve parne potencije u $P(z)$ su jednake nuli, osim konstantnog člana koji je jednak 1.
- Koeficijenti uz neparne potencije $P(z)$ su varijable dizajna decimiranog filtarskog sloga s dva pojasa i potpunom rekonstrukcijom.

8

Primjer $P_0(z)$

- Jedan (dobar) izbor za $P_0(z)$ je:

$$P_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^{2p} Q_{2p-2}(z).$$

- Prvi član osigurava nultočku višestrukosti $2p$ na frekvenciji $\omega=\pi$.
- Drugi član je polinom takav da vrijedi PR uvjet.
- Ako je polinom reda $2p-2$, pokazuje se da je $Q(z)$ jednoznačan.
- Takav filtar nazivamo binomnim ili maksimalno glatkim (*eng. binomial, maxflat*).

9

Primjer $P_0(z)$

- Za $p=1$ imamo:

$$P_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^2\cdot q_0$$

- Polinom $Q(z)$ je reda $2\cdot 1-2=0$.

$$P_0(z)=\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)\cdot q_0$$
$$P_0(z)-P_0(-z)=\left[\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)-\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)\right]\cdot q_0,$$
$$P_0(z)-P_0(-z)=\ 4z^{-1}q_0=2z^{-L},$$
$$L=1,\quad q_0=1/2.$$
$$P(z)=z^1\cdot P_0(z)\ =\frac{z}{2}+1+\frac{z^{-1}}{2}.$$

10

Primjer $P_0(z)$

- Faktorizacija P_0 u F_0H_0 ima više varijanti:

$$H_0(z)=\tfrac{1}{2} \qquad F_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^2$$
$$H_0(z)=1+z^{-1} \qquad F_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)\cdot 1/2$$
$$H_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^2 \qquad F_0(z)=\tfrac{1}{2}$$

- Za primjene je posebno zanimljiv srednji izbor:

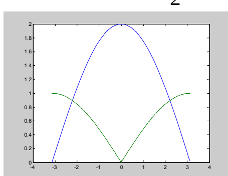
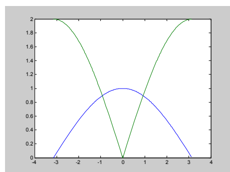
$$H_0(z)=1+z^{-1} \qquad F_0(z)=\frac{1+z^{-1}}{2}$$

11

Primjer $P_0(z)$

- Filtri u drugoj grani su, naravno:

$$H_1(z)=F_0(-z)=\frac{1-z^{-1}}{2} \qquad F_1(z)=-H_0(-z)\ =-1+z^{-1}$$

- Kako uvjeti PR sadrže produkt filtara F_1H_1, često se faktor ½ iz H_1 premješta u F_1.

12

Primjer $P_0(z)$

- Vrlo ilustrativan je slučaj p=2:

$$P_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^4\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right),$$
$$P_0(z)=\left(1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4}\right)\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right).$$

- Za centriranje množimo sa z^3:

$$P(z)=\left(1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4}\right)\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right)z^3,$$
$$\begin{aligned}P(z)=\ & q_0z^3+(4q_0+q_1)z^2+(6q_0+4q_1+q_2)z\\ &+4q_0+6q_1+4q_2\\ &+(q_0+4q_1+6q_2)z^{-1}+(q_1+4q_2)z^{-2}+q_2z^{-3}.\end{aligned}$$

13

Primjer $P_0(z)$

- Članovi uz parne potencije moraju biti nula, a konstantni član mora biti jedan.
- To daje 3 jednadžbe s 3 nepoznanice:

$$\begin{aligned}4q_0+q_1&=0,\\ 4q_0+6q_1+4q_2&=1,\\ q_1+4q_2&=0.\end{aligned}$$

- a rješenje je: $q_0=-\frac{1}{16},\ q_1=\frac{1}{4},\ q_2=\frac{1}{16}.$

$$\begin{aligned}P_0(z)&=\frac{1}{16}\left(1+z^{-1}\right)^4\left(-1+4z^{-1}-z^{-2}\right),\\ &=\frac{1}{16}\left(1+z^{-1}\right)^4\left(c-z^{-1}\right)\left(-c^{-1}+z^{-1}\right),\quad c=2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

14

Faktorizacija $P_0(z)$

- Za F_0 ili H_0 (u bilo kojem redoslijedu) biramo:

1	red = 0
$\left(1+z^{-1}\right)$	red = 1
$\left(1+z^{-1}\right)^2$ ili $\left(1+z^{-1}\right)\left(c-z^{-1}\right)$	red = 2
$\left(1+z^{-1}\right)^3$ ili $\left(1+z^{-1}\right)^2\left(c-z^{-1}\right)$	red = 3

- Svaka od faktorizacija ima svojstva pogodna za određenu primjenu.
- Izbori faktora koji ne sadrže (c-z^{-1}) daju simetrične filtre: filtre s linearnom fazom.

15

Simetričnost odziva filtara

- U filtarskom slogu s dva pojasa i s potpunom rekonstrukcijom linearnu fazu postižemo ako su analizirajući filtri:
  - oba simetrična, neparne dužine;
  - jedan simetričan, drugi antisimetričan, parne dužine.
- Dokaz: Parne i neparne dužine se ponašaju različito, ako alterniramo predznake:

a, b, c, b, a	→	a, -b, c, -b, a	Ostaje simetričan
a, b, b, a	→	a, -b, b, -a	Antisimetričan

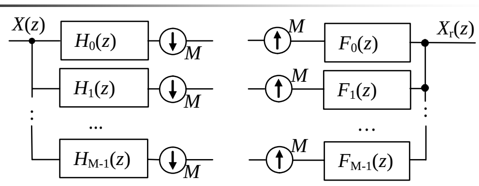
16

Simetričnost odziva filtara

- Da zadovoljimo uvjete PR, F_0 dobivamo iz H_1, a F_1 iz H_0 alternacijom predznaka.
- Biramo H_0 i F_0 simetrične (antisimetričnost bi zahtijevala konstantni član jednak nuli).
- Dvije dozvoljene varijante:
  - svi filtri su neparne dužine, H_1 i F_1 su simetrični.
  - svi filtri su parne dužine, H_1 i F_1 su antisimetrični.
- Simetričnost impulsnog odziva je poželjno svojstvo za brojne primjene koje uključuju obradu u domeni transformacije.

17

Maksimalno decimirani filtarski slog sa M pojaseva



- Maksimalno decimirani slog znači da je broj pojaseva jednak faktoru decimacije.
- Tada je broj uzoraka u domeni transformacije jednak broju uzoraka signala.

18

Maksimalno decimirani filtarski slog sa M pojaseva

- Analiza filtarskog sloga sa M pojaseva može se provesti analogno analizi sloga s dva pojasa.
- Analizirajuća modulacijska matrica sloga s dva pojasa:

$$\mathbf{H}_m(z)=\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}H_0(z)\\ H_1(z)\end{matrix}}_{\text{Osnovna komponenta}} & \underbrace{\begin{matrix}H_0(-z)\\ H_1(-z)\end{matrix}}_{\text{Aliasing komponenta}}\end{bmatrix} \qquad -z=z\cdot W \qquad W=e^{-j\frac{2\pi}{2}}$$

19

Maksimalno decimirani filtarski slog sa M pojaseva

- Analizirajuća modulacijska matrica sloga sa M pojaseva:

$$\mathbf{H}_m(z)=\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(zW) & \cdots & H_0(zW^{M-1})\\ H_1(z) & H_1(zW) & \cdots & H_1(zW^{M-1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{H_{M-1}(z)}_{\text{Osnovna komponenta}} & \underbrace{H_{M-1}(zW) \quad \cdots \quad H_{M-1}(zW^{M-1})}_{\text{Aliasing komponente}}\end{bmatrix} \qquad W=e^{-j\frac{2\pi}{M}}$$

20

Uvjet potpune rekonstrukcije

$$\begin{bmatrix} F_0(z)\\ F_1(z)\\ \vdots \\ F_{M-1}(z)\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(zW) & \cdots & H_0(zW^{M-1})\\ H_1(z) & H_1(zW) & \cdots & H_1(zW^{M-1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{M-1}(z) & H_{M-1}(zW) & \cdots & H_{M-1}(zW^{M-1})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mz^{-L}\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(zW) & \cdots & H_0(zW^{M-1})\\ H_1(z) & H_1(zW) & \cdots & H_1(zW^{M-1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{M-1}(z) & H_{M-1}(zW) & \cdots & H_{M-1}(zW^{M-1})\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_0(z)\\ F_1(z)\\ \vdots \\ F_{M-1}(z)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mz^{-L}\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$$

21

Rekonstrukcijski filtri i rekonstruirani signal

$$\begin{bmatrix} F_0(z)\\ F_1(z)\\ \vdots \\ F_{M-1}(z)\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(zW) & \cdots & H_0(zW^{M-1})\\ H_1(z) & H_1(zW) & \cdots & H_1(zW^{M-1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{M-1}(z) & H_{M-1}(zW) & \cdots & H_{M-1}(zW^{M-1})\end{bmatrix}^T\right)^{-1} \begin{bmatrix} Mz^{-L}\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$$

$$X_r(z)=\frac{1}{M}\begin{bmatrix} F_0(z)\\ F_1(z)\\ \vdots \\ F_{M-1}(z)\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(zW) & \cdots & H_0(zW^{M-1})\\ H_1(z) & H_1(zW) & \cdots & H_1(zW^{M-1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{M-1}(z) & H_{M-1}(zW) & \cdots & H_{M-1}(zW^{M-1})\end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z)\\ X(zW)\\ \vdots \\ X(zW^{M-1})\end{bmatrix}$$

22

Teme predavanja

- Dizajn biortogonalnih filtarskih slogova
- Produkt filtar, polupojasni filtar, maksimalno gladak filtar
- Primjeri dizajna
- Uvjet potpune rekonstrukcije za filtarski slog sa M pojaseva

23