Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

Teme predavanja

- Decimacija i interpolacija za faktor M
  - svojstva u vremenskoj, frekvencijskoj i Z domeni.
- Filtarski slog s dva kanala, decimacijom i ekspanzijom
  - uvjeti potpune rekonstrukcije u vremenskoj, frekvencijskoj i Z domeni.
- Dizajn filtara

2

M-terostruki decimator

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow \mathrm{M}} \longrightarrow v[n]$$

- U vremenskoj domeni: $v[n] = x[\mathrm{M}n]$.
- U frekvencijskoj domeni?
- Neka je signal $u[n]$ takav da mu je svaki M-ti uzorak jednak $x[n]$, a ostali su nula:

$$u[n] = \begin{cases} x[n] & n \ \text{djeljiv s M}, \\ 0 & n \ \text{nije djeljiv s M}. \end{cases}$$

3

Spektar M-terostruko decimiranog signala

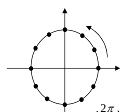
- Spektar takvog signala je:

$$U\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n \text{ djeljiv sa M}} x[n] \cdot e^{-j\omega n}.$$

- Da bi zapisali sumu po svim n, koristimo:

$$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}nk} = \frac{1}{M}\left\{1^n + e^{j\frac{2\pi}{M}n} + \cdots + e^{j\frac{2\pi}{M}(M-1)n}\right\},$$

$$= \frac{1}{M}\frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{M}nM}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{M}n}} = \begin{cases} 1 & n \ \text{djeljiv s M} \\ 0 & n \ \text{nije djeljiv s M} \end{cases}$$



pozicije $e^{j\frac{2\pi}{M}k}$

4

Spektar M-terostruko decimiranog signala

$$U\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n \text{ djeljiv sa M}} x[n] \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$\frac{1}{M}\left\{\sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n} + \sum_n x[n] \cdot e^{-j\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)n} + \cdots + \sum_n x[n] \cdot e^{-j\left(\omega + \frac{2\pi}{M}(M-1)\right)n}\right\}.$$

- Članovi uz n djeljiv sa M se međusobno podupiru, a ostali dokidaju.
- Izraz za spektar glasi:

$$U\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M}\left[X\left(e^{j\omega}\right) + X\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)}\right) + \cdots + X\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{M}(M-1)\right)}\right)\right].$$

5

Spektar M-terostruko decimiranog signala

- $v[n] = u[Mn]$.
- Kako $u[n]$ sadrži samo uzorke gdje je n djeljiv sa M, za spektre vrijedi $V(\omega) = U(\omega/M)$:

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \sum_n u[Mn] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_k u[k] \cdot e^{-j\frac{\omega}{M}k},$$

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M}\left[X\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right) + X\left(e^{j\left(\frac{\omega + 2\pi}{M}\right)}\right) + \cdots + X\left(e^{j\left(\frac{\omega + 2\pi(M-1)}{M}\right)}\right)\right].$$

6

M-terostruka decimacija u Z domeni

- Identičnim postupkom uz zamjenu $z = e^{j\omega}$ dobivamo sljedeće veze:

$$U(z)=\frac{1}{M}\left[X(z)+X\left(ze^{j\frac{2\pi}{M}}\right)+\cdots+X\left(ze^{j\frac{2\pi}{M}(M-1)}\right)\right],$$

$$V(z)=U\left(z^{\frac{1}{M}}\right),$$

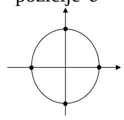
$$V(z)=\frac{1}{M}\left[X\left(z^{\frac{1}{M}}\right)+X\left(z^{\frac{1}{M}}e^{j\frac{2\pi}{M}}\right)+\cdots+X\left(z^{\frac{1}{M}}e^{j\frac{2\pi}{M}(M-1)}\right)\right].$$

7

Primjer: spektar četverostruko decimiranog signala

- Primjer, M=4:

pozicije $e^{j\frac{2\pi}{4}k}$



$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}e^{j\frac{2\pi}{4}nk}=\frac{1}{4}\left\{1^n+e^{j2\pi\frac{1}{4}n}+e^{j2\pi\frac{2}{4}n}+e^{j2\pi\frac{3}{4}n}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{1^n+j^n+(-1)^n+(-j)^n\right\}$$

$$n=0\rightarrow\frac{1}{4}\{1+1+1+1\}=1,\quad n=1\rightarrow\frac{1}{4}\{1+j-1-j\}=0,$$
$$n=2\rightarrow\frac{1}{4}\{1-1+1-1\}=0,\quad n=3\rightarrow\frac{1}{4}\{1-j-1+j\}=0.$$

8

Primjer: spektar četverostruko decimiranog signala

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n\text{ djeljiv sa 4}}x[n]\cdot e^{-j\omega n}=\frac{1}{4}\left\{\sum_n x[n]\cdot e^{-j\omega n}\cdot 1^n+\sum_n x[n]\cdot e^{-j\omega n}\cdot j^n+\right.$$
$$\left.+\sum_n x[n]\cdot e^{-j\omega n}\cdot(-1)^n+\sum_n x[n]\cdot e^{-j\omega n}\cdot(-j)^n\right\},$$
$$=\frac{1}{4}\sum_n x[n]\cdot e^{-j\omega n}\left\{1^n+j^n+(-1)^n+(-j)^n\right\}$$

$$u[n]=\frac{1}{4}x[n]\cdot\left\{1^n+j^n+(-1)^n+(-j)^n\right\},$$

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{4}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j\left(\omega+2\pi\frac{1}{4}\right)}\right)+X\left(e^{j\left(\omega+2\pi\frac{2}{4}\right)}\right)+X\left(e^{j\left(\omega+2\pi\frac{3}{4}\right)}\right)\right].$$

9

Primjer: spektar četverostruko decimiranog signala

$$V\left(e^{j\omega}\right)=\sum_n u[4n]\cdot e^{-j\omega n}=\sum_k u[k]\cdot e^{-j\frac{\omega}{4}k}=U\left(e^{j\frac{\omega}{4}}\right).$$

- Izraz dobiven supstitucijom k=4n, odnosno n=1/4k je u redu, jer su svi $u[k]$ za k koji nije djeljiv s 4 jednaki nuli.
- Konačno:

$$V\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{4}\left[X\left(e^{j\frac{\omega}{4}}\right)+X\left(e^{j\left(\frac{\omega+2\pi}{4}\right)}\right)+X\left(e^{j\left(\frac{\omega+2\pi\cdot 2}{4}\right)}\right)+X\left(e^{j\left(\frac{\omega+2\pi\cdot 3}{4}\right)}\right)\right].$$

10

Primjer: četverostruka decimacija u Z domeni

- Uz $z = e^{j\omega}$ imamo:

$$U(z)=\frac{1}{4}\left[X(z)+X\left(ze^{j2\pi\frac{1}{4}}\right)+X\left(ze^{j2\pi\frac{2}{4}}\right)+X\left(ze^{j2\pi\frac{3}{4}}\right)\right],$$

$$V(z)=U\left(z^{\frac{1}{4}}\right),$$

$$V(z)=\frac{1}{4}\left[X\left(z^{\frac{1}{4}}\right)+X\left(z^{\frac{1}{4}}e^{j2\pi\frac{1}{4}}\right)+X\left(z^{\frac{1}{4}}e^{j2\pi\frac{2}{4}}\right)+X\left(z^{\frac{1}{4}}e^{j2\pi\frac{3}{4}}\right)\right].$$

11

M-terostruki ekspander

$$x[n]\rightarrow\boxed{\uparrow M}\rightarrow u[n]$$

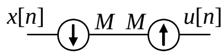
- U vremenskoj domeni: $u[Mn]=x[n]$, drugdje 0.
- U frekvencijskoj domeni:

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\sum u[n]\cdot e^{-j\omega n}=\sum u[Mn]\cdot e^{-j\omega Mn},$$
$$=\sum x[n]\cdot e^{-j\omega Mn}=X\left(e^{jM\omega}\right).$$

- Rezultat je: $U\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{jM\omega}\right)$,
- odnosno: $U(z)=X\left(z^M\right)$.

12

Decimator + ekspander



- U vremenskoj domeni:

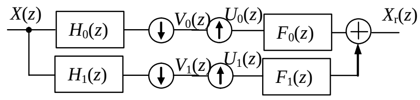
$$u[n]=\begin{cases} x[n] & n \text{ djeljiv s M,} \\ 0 & n \text{ nije djeljiv s M.}\end{cases}$$

- Već smo vidjeli da je spektar:

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{M}\right)}\right)+\cdots+X\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{M}(M-1)\right)}\right)\right].$$

13

Filtarski slog s decimacijom i ekspanzijom



- PR uvjet nedecimiranog sustava bio je:

$$F_0(z)\cdot H_0(z)+F_1(z)\cdot H_1(z)=z^{-L}$$

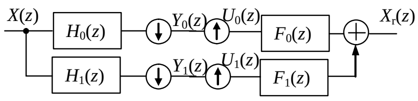
- Za prikazani sustav vrijedi:

$$U_0(z)=\frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z)+H_0(-z)X(-z)\right].$$

$$U_1(z)=\frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z)+H_1(-z)X(-z)\right].$$

14

Filtarski slog s decimacijom i ekspanzijom



- Stoga uvjet potpune rekonstrukcije glasi:

$$F_0(z)\cdot U_0(z)+F_1(z)\cdot U_1(z)=z^{-L}X(z)$$

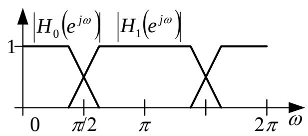
- PR uvjet se razlikuje od nedecimiranog po tome što izrazi za U_0 i U_1 sadrže članove koji su posljedica *decimacije i interpolacije* :

$$H_0(-z)X(-z), \qquad H_1(-z)X(-z).$$

15

Primjer

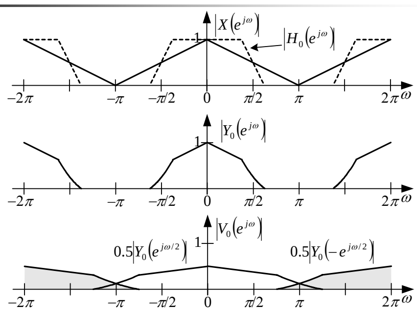
- Neka su H_0 i H_1 filtri sljedećih karakteristika:



- H_0 je niskopropusni filtar, a H_1 visokopropusni.
- Prijelazno područje filtara prelazi $\pi/2$, pa očekujemo *aliasing*.

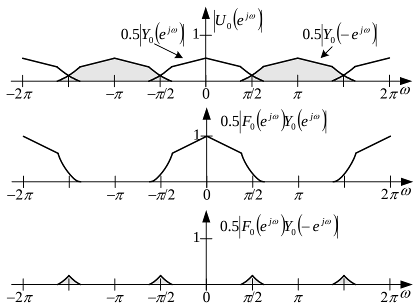
16

Spektar signala i karakteristika niskopropusnog filtra H_0
Filtrirani signal Y_0 nakon H_0
Signal V_0 nakon decimacije



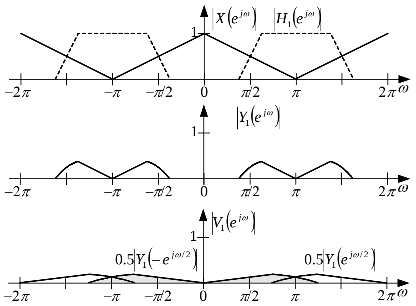
17

Signal U_0 nakon decimacije i ekspanzije
Osnovna komponenta nakon filtriranja s F_0
Aliasing komponenta nakon filtriranja s F_0

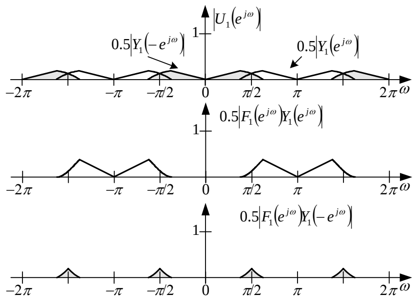


18

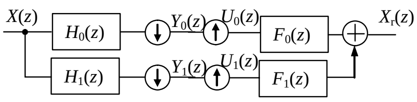
Spektar signala i karakteristika visokopropusnog filtra H_1
Filtrirani signal H_1 nakon H_1
Signal V_1 nakon decimacije



Signal U_1 nakon decimacije i ekspanzije
Osnovna komponenta nakon filtriranja s F_1
Aliasing komponenta nakon filtriranja s F_1



Filtarski slog s decimacijom i ekspanzijom



$$F_0(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z)+H_0(-z)X(-z)\right]+$$

$$F_1(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z)+H_1(-z)X(-z)\right]=z^{-L}X(z)$$

- Ideja: neka se aliasing komponente (komponente koje su posljedica decimacije i ekspanzije) međusobno poništavaju.

Potpuna rekonstrukcija

- Uvjet potpune rekonstrukcije možemo razdvojiti na dva dijela. Prvi je:

$$F_0(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_0(-z)X(-z)\right]+F_1(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_1(-z)X(-z)\right]=0$$

$$F_0(z)\cdot H_0(-z)+F_1(z)\cdot H_1(-z)=0$$

- Aliasing komponente iz dva filtra moraju biti istog iznosa i suprotnog predznaka. Nadalje:

$$F_0(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z)\right]+F_1(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z)\right]=z^{-L}X(z)$$

$$F_0(z)\cdot H_0(z)+F_1(z)\cdot H_1(z)=2z^{-L}$$

Uvjeti potpune rekonstrukcije

- Uvjet rekonstrukcije bez izobličenja:

$$F_0(z)\cdot H_0(z)+F_1(z)\cdot H_1(z)=2z^{-L}$$

- Uvjet poništenja aliasinga:

$$F_0(z)\cdot H_0(-z)+F_1(z)\cdot H_1(-z)=0$$

- Problem je, naravno, pronaći četvorku filtara željenih frekvencijskih karakteristika koji potpuno ili aproksimativno zadovoljavaju ova dva uvjeta.

Uvjeti PR u matričnoj formi

$$\begin{bmatrix}F_0(z) & F_1(z)\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}H_0(z) & H_0(-z)\\ H_1(z) & H_1(-z)\end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m(z)}=\begin{bmatrix}2z^{-L} & 0\end{bmatrix}$$

- Matrica H_m naziva se još i analizirajuća modulacijska matrica.
- Nadopunimo matricu F još jednim retkom, uz supstituciju $z\to -z$ dobivamo još jedan poznati oblik PR uvjeta u matričnoj formi.

Uvjeti PR u matričnoj formi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ F_0(-z) & F_1(-z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_m(z)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m(z)} = \begin{bmatrix} 2z^{-L} & 0 \\ 0 & 2(-z)^{-L} \end{bmatrix}$$

- Matrica F_m naziva se još i sintetizirajuća modulacijska matrica.
- Kraće zapisan uvjet potpune rekonstrukcije uz korištenje modulacijskih matrica i L=0 glasi:

$$\mathbf{F}_m(z) \cdot \mathbf{H}_m(z) = 2 \cdot \mathbf{I}$$

- Takav filtarski slog nazivamo biortogonalnim.

25

Potpuna rekonstrukcija u matričnoj formi

- Veza ulaza i izlaza filtarskog sloga izražena pomoću modulacijske matrice:

$$X_r(z) = z^{-L} X(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}$$

26

Dizajn filtara

- Kako dizajnirati četvorku filtara H_0, F_0, H_1, F_1?
- Prijedlog: za poništenje *aliasinga* odabrati:

$$F_0(z) = H_1(-z), \quad F_1(z) = -H_0(-z)$$

- Očito, uvjet poništenja *aliasinga* je zadovoljen:

$$F_0(z) \cdot H_0(-z) + F_1(z) \cdot H_1(-z) = 0$$
$$H_1(-z) \cdot H_0(-z) - H_0(-z) \cdot H_1(-z) = 0$$

- Kako izgleda isti izbor u vremenskoj domeni?

27

Dizajn filtara: poništenje *aliasinga*

$$F_0(z) = H_1(-z), \qquad F_1(z) = -H_0(-z);$$
$$f_0[n] = (-1)^n \cdot h_1[n], \qquad f_1[n] = -(-1)^n h_0[n]$$

- Pretpostavimo da se radi o filtrima s konačnim impulsnim odzivom.
- Naš izbor daje rješenje s alternirajućim predznacima impulsnog odziva:

h_0	a, b, c	p, -q, r, -s, t	f_0
h_1	p, q, r, s, t	-a, b, -c	f_1

28

Dizajn filtara: rekonstrukcija bez izobličenja

- Treba provjeriti i uvjet rekonstrukcije bez izobličenja:

$$F_0(z) \cdot H_0(z) + F_1(z) \cdot H_1(z) = 2z^{-L}$$

- U svakom od pribrojnika javlja se produkt filtara. Označimo "produkt filtre":

$$P_0(z) = F_0(z) \cdot H_0(z), \qquad P_1(z) = F_1(z) \cdot H_1(z).$$

- P_0 je niskopropusni, a P_1 visokopropusni produkt filtar.

29

Dizajn filtara: rekonstrukcija bez izobličenja

- Uz naš izbor vrijedi:

$$P_1(z) = F_1(z) \cdot H_1(z) = -H_0(-z) \cdot H_1(z) = -H_0(-z) \cdot F_0(-z),$$
$$P_1(z) = -P_0(-z).$$

- Uvjet rekonstrukcije bez izobličenja tad glasi:

$$F_0(z) \cdot H_0(z) - F_0(-z) \cdot H_0(-z) = P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-L}$$

- Konačno, recept se sastoji od dva koraka:
  - dizajn NP filtra P_0 koji zadovoljava gornji uvjet,
  - faktorizacija P_0 u $F_0 H_0$. Izračunavanje F_1 i H_1.

30

Teme predavanja

- Decimacija i interpolacija za faktor M
  - svojstva u vremenskoj, frekvencijskoj i Z domeni.
- Filtarski slog s dva kanala, decimacijom i ekspanzijom
  - uvjeti potpune rekonstrukcije u vremenskoj, frekvencijskoj i Z domeni.
- Dizajn filtara

31