Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

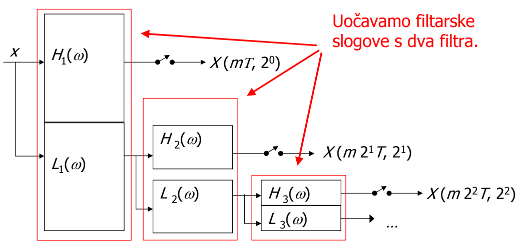
Teme predavanja

- Motivacija za filtarske slogove.
- Filtarski slog s dva pojasa
  - uvjeti potpune rekonstrukcije,
  - energetski okvir preslikavanja.
- Primjeri:
  - filtri s konačnim impulsnim odzivom,
  - idealni pojasni filtri.
- Decimacija i ekspanzija
  - svojstva u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

2

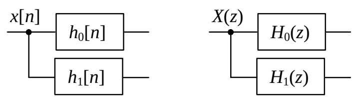
Oktavna DWT kao slog filtara

- Rekurzivna realizacija



3

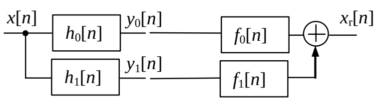
Filtarski slog s dva filtra



- Filtri na prethodnom slajdu su kontinuirani, a signal na izlazu je otipkan – diskretiziran.
- Filtri na ovom slajdu su diskretni.
- Ovakvim filtarskim slogovima poslužit ćemo se za definiciju DWT vremenski diskretnih signala.
- Sličnim filtarskim slogovima ćemo efikasno realizirati i STFT diskretnih signala.

4

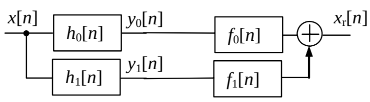
Filtarski slog s dva pojasa



- Pitanje:
  - da li je moguća potpuna rekonstrukcija signala x iz komponenti y_0 i y_1?
- Pretpostavit ćemo da se rekonstrukcija može realizirati slogom od dva (nova) filtra.
- Dozvolit ćemo da rekonstruirani signal kasni u odnosu na ulazni: $x_r[n] = x[n+L]$.

5

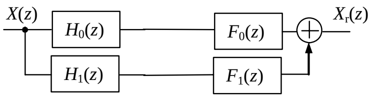
Filtarski slog s dva pojasa



- Moramo pronaći četvorku filtara za koju vrijedi uvjet potpune rekonstrukcije: $x_r[n] = x[n+L]$.
- Napravimo primjer.
- Neka filtri h_0, h_1, f_0 i f_1 imaju svega po 2 uzorka impulsnog odziva.

6

Primjer potpune rekonstrukcije



- U z-domeni uvjet potpune rekonstrukcije i filtre možemo zapisati ovako:

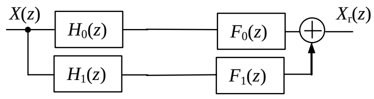
$$X_r(z) = z^{-L} X(z)$$

$$H_0(z) = h_0[0] + h_0[1]z^{-1} \quad F_0(z) = f_0[0] + f_0[1]z^{-1}$$

$$H_1(z) = h_1[0] + h_1[1]z^{-1} \quad H_1(z) = f_1[0] + f_1[1]z^{-1}$$

7

Primjer potpune rekonstrukcije

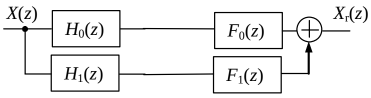


- Ukupna prijenosna funkcija je $H_0F_0+H_1F_1$.
- Kako se radi o filtrima s po dva uzorka, rezultat konvolucije može imati najviše tri.
- Razumno je tražiti rješenje s kašnjenjem L=1.

$$\left(f_0[0] + f_0[1]z^{-1}\right)\cdot\left(h_0[0] + h_0[1]z^{-1}\right) + \left(f_1[0] + f_1[1]z^{-1}\right)\cdot\left(h_1[0] + h_1[1]z^{-1}\right) = z^{-1}$$

8

Primjer potpune rekonstrukcije

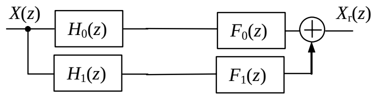


$$\left(f_0[0] + f_0[1]z^{-1}\right)\cdot\left(h_0[0] + h_0[1]z^{-1}\right) + \left(f_1[0] + f_1[1]z^{-1}\right)\cdot\left(h_1[0] + h_1[1]z^{-1}\right) = z^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&f_0[0]h_0[0] + f_1[0]h_1[0] + \\
&\left(f_0[1]h_0[0] + f_0[0]h_0[1] + f_1[1]h_1[0] + f_1[0]h_1[1]\right)z^{-1} + \\
&\left(f_0[1]h_0[1] + f_1[1]h_1[1]\right)z^{-2} = z^{-1}
\end{aligned}$$

9

Primjer potpune rekonstrukcije



$$f_0[0]h_0[0] + f_1[0]h_1[0] = 0$$

$$f_0[1]h_0[0] + f_0[0]h_0[1] + f_1[1]h_1[0] + f_1[0]h_1[1] = 1$$

$$f_0[1]h_0[1] + f_1[1]h_1[1] = 0$$

- Imamo 3 jednadžbe i ukupno 8 nepoznatih parametara.
- Očito, postoji velika sloboda izbora.

10

Primjer potpune rekonstrukcije

$$f_0[0]h_0[0] + f_1[0]h_1[0] = 0$$

$$f_0[1]h_0[0] + f_0[0]h_0[1] + f_1[1]h_1[0] + f_1[0]h_1[1] = 1$$

$$f_0[1]h_0[1] + f_1[1]h_1[1] = 0$$

$$\text{izbor}: h_0 = \{1, 1\}, \quad h_1 = \{1, -1\}$$

- H_0 je vrlo jednostavan niskopropusni, a H_1 visokopropusni filtar.

$$\rightarrow f_0[0] + f_1[0] = 0, \quad f_0[1] - f_1[1] = 0.$$

$$f_0[1] + f_0[0] + f_1[1] - f_1[0] = 1$$

11

Primjer potpune rekonstrukcije

$$f_0[0] + f_1[0] = 0, \quad f_0[1] - f_1[1] = 0.$$

$$f_0[1] + f_0[0] + f_1[1] - f_1[0] = 1$$

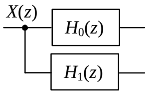
- Imamo 3 jednadžbe s 4 nepoznanice.
- Jedno moguće rješenje:

$$f_0 = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}, \quad f_1 = \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$$

- Osim navedenog postoji i bezbroj drugih rješenja.
- Koja rješenja ne bi dala potpunu rekonstrukciju?

12

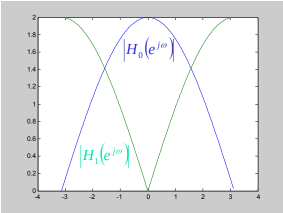
Primjer potpune rekonstrukcije



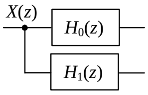
$H_0(z)=1+z^{-1}$ $\qquad z=e^{j\omega}$

$H_1(z)=1-z^{-1}$

- Za naš izbor pogledat ćemo karakteristike analizirajućih filtara u frekvencijskoj domeni.
- NP filtar ima nul-točku za $\omega=\pm\pi$, a VP filtar za za $\omega=0$.



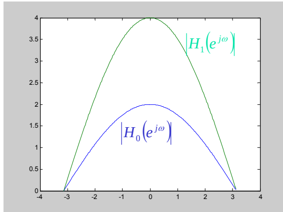
Nepotpuna rekonstrukcija



$H_0(z)=1+z^{-1}$

$H_1(z)=2+2z^{-1}$

- U ovom primjeru oba filtra imaju nul-točku karakteristike za $\omega=\pm\pi$.
- Signal $x[n]$ = $(-1)^n$ preslikava se u $y_0[n]$ = $y_1[n]$ = 0.
- Rekonstrukcija nije moguća!



Nepotpuna rekonstrukcija

- Nemogućnost potpune rekonstrukcije je posljedica koincidencije nul-točaka frekvencijske karakteristike filtara u slogu.
- Postoji signal x konačne energije koji se preslikava u skup signala $\{y_0, y_1\}$ nulte energije.
- Problem bi nastupio i kada bi neki od filtara imao pol na jediničnoj kružnici: tada bi se signal konačne energije preslikavao u skup signala $\{y_0, y_1\}$ beskonačne energije.

15

Energetski okvir preslikavanja

- Diskusija o mogućnosti rekonstrukcije vodi nas na energetski okvir preslikavanja.
- Energije signala i slike iznose:

$$\sum_n |x[n]|^2 \qquad \sum_n |y_0[n]|^2+|y_1[n]|^2$$

- U DFT domeni to iznosi:

$$\frac{1}{N}\sum_k |X[k]|^2 \qquad \frac{1}{N}\sum_k |Y_0[k]|^2+|Y_1[k]|^2$$
$$=\frac{1}{N}\sum_k \left(|H_0[k]|^2+|H_1[k]|^2\right)\cdot|X[k]|^2$$

16

Energetski okvir preslikavanja

$$\sum_k |X[k]|^2 \overset{?}{\longleftrightarrow} \sum_k \left(|H_0[k]|^2+|H_1[k]|^2\right)\cdot|X[k]|^2$$

- Vidimo da za svaku frekvenciju k izraz

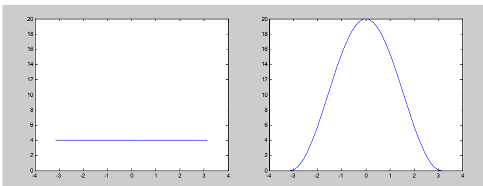
$$|H_0[k]|^2+|H_1[k]|^2$$

- određuje omjer energija signala i slike.
- Izračunajmo izraz za naša dva primjera: s mogućom i nemogućom potpunom rekonstrukcijom.
- Nacrtajmo rezultat za svaki k i odredimo energetski raspon (granice A i B).

17

Energetski okvir preslikavanja

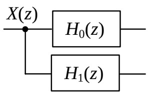
- Lijevo prvi, desno drugi primjer.

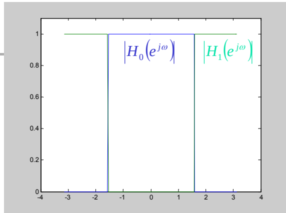


- Lijevo: A=4, B=4; desno: A=0, B=20.
- U prvom primjeru rekonstrukcija je moguća, čak je transformacija uniformna.

18

Idealni filtri

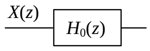


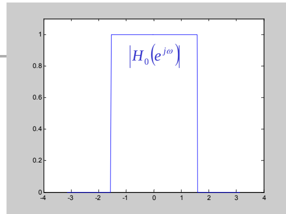


- Neka su H_0 i H_1 idealni NP, odnosno VP filtri preko polovice frekvencijskog raspona.
- Impulsni odziv takvih filtara je beskonačnog trajanja.

19

Idealni filtri





$$H_0(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\cdot e^{-j\theta(\omega)}$$

$$A(e^{j\omega}) = |H_0(e^{j\omega})| = \begin{cases}1, & |\omega| < \frac{\pi}{2}\\ 0. & \end{cases}$$

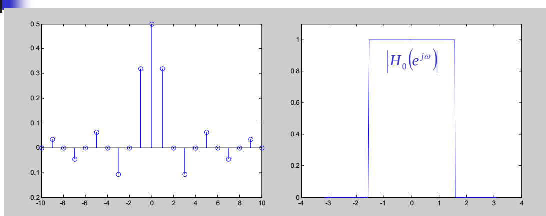
$$\theta(\omega) = K\,\omega.$$

- Impulsni odziv $h_0[n]$:

$$h_0[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot e^{-j\omega K} e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2}\frac{\sin[n-K]\frac{\pi}{2}}{[n-K]\frac{\pi}{2}}$$

20

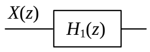
Idealni filtri

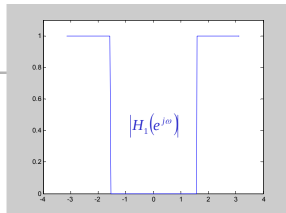


- Lijevo: impulsni odziv h_0 za kašnjenje K=0.

21

Idealni filtri





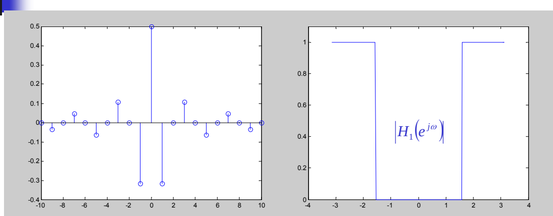
- Karakteristika je u odnosu na H_0 pomaknuta za π.
- => množenje s $e^{j\pi n}$ u vremenu.

$$e^{j\pi n} = \cos(\pi n) = (-1)^n \qquad h_1[n] = \frac{1}{2}\frac{\sin[n-K]\frac{\pi}{2}}{[n-K]\frac{\pi}{2}}\cdot(-1)^n$$

- Svaki drugi uzorak promijenio je predznak!

22

Idealni filtri

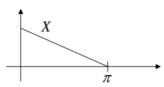


- Lijevo: impulsni odziv h_1 za kašnjenje K=0.

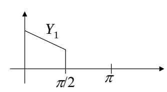
23

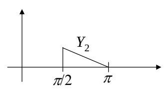
Idealni filtri, razlaganje

- Pretpostavimo neki spektar X.



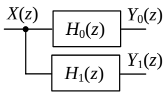
- Nakon filtriranja idealnim filtrima, spektri Y_1 i Y_2 bi i izgledali ovako:

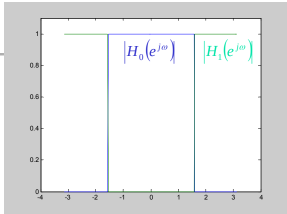




24

Idealni filtri

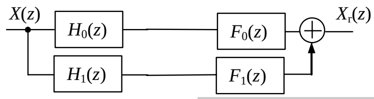




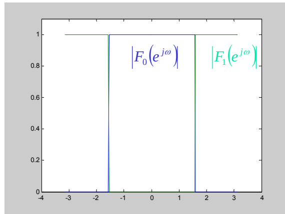
- Za potpunu rekonstrukciju, dovoljno je zbrojiti Y_0 i Y_1.
- Nul-područje jednog filtra poklapa se s jediničnim pojačanjem drugoga.

25

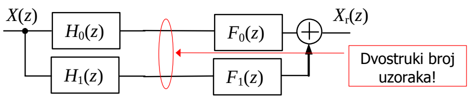
Idealni filtri, rekonstrukcija



- Možemo odabrati i ovakve rekonstrukcijske filtre:
- AF karakteristike su iste, a FF suprotnog predznaka.
- Tad je kašnjenje sloga 0.



Uvjet potpune rekonstrukcije



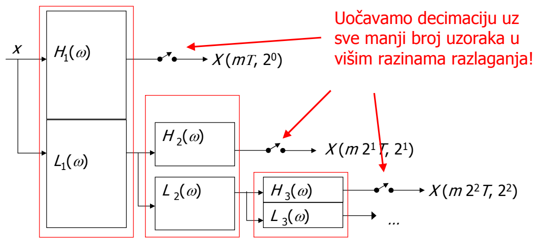
$$F_0(z)\cdot H_0(z)+F_1(z)\cdot H_1(z)=z^{-L}$$

- Uvjet potpune rekonstrukcije filtarskog sloga bilo je relativno lako osigurati.
- Govorimo o filtarskom slogu bez decimacije.
- Signali y_1 i y_2 su istog perioda otipkavanja, odnosno imaju isti broj uzoraka kao x.
- Preslikavanje je očito redundantno.

27

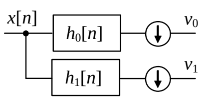
Oktavna DWT kao slog filtara

- Rekurzivna realizacija



28

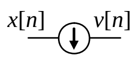
Filtarski slog s decimacijom



- Jednak broj uzoraka slike osigurali bi decimacijom s faktorom 2.
- Decimacija s faktorom 2 znači odbacivanje svakog drugog uzorka.
- Da li je i pod takvim uvjetima rekonstrukcija moguća?

29

Decimator



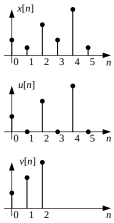
- U vremenskoj domeni: $v[n] = x[2n]$.
- Što imamo u frekvencijskoj domeni?
- Kreirajmo iz $x[n]$ pomoćni signal $u[n]$ takav da mu je svaki drugi uzorak nula:

$$u[n]=\begin{cases} x[n] & n \text{ paran,} \\ 0 & n \text{ neparan.} \end{cases}$$

30

Spektar decimiranog signala

$$u[n]=\begin{cases} x[n] & n \text{ paran,} \\ 0 & n \text{ neparan.} \end{cases}$$



- Spektar takvog signala je:

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n\text{ paran}} x[n]\cdot e^{-j\omega n}$$

- Želimo zapisati sumu po svim n.
- Iskoristit ćemo činjenicu:

$$e^{-j\omega n}=\begin{cases} +e^{-j(\omega+\pi)n} & n \text{ paran} \\ -e^{-j(\omega+\pi)n} & n \text{ neparan} \end{cases}$$

31

Spektar decimiranog signala

$$\sum_{n\text{ paran}} x[n]\cdot e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{n} x[n]\cdot e^{-j\omega n}+\frac{1}{2}\sum_{n} x[n]\cdot e^{-j(\omega+\pi)n}$$

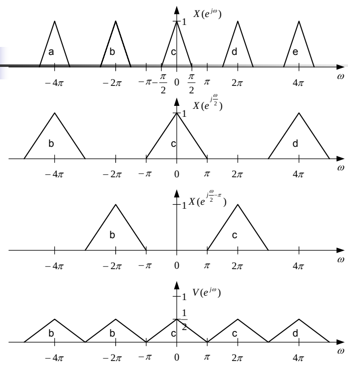
- Članovi uz neparne n se međusobno dokidaju.

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)\right]$$

- $v[n] = u[2n]$.
- Kako $u[n]$ sadrži samo parne uzorke, za spektre vrijedi $V(\omega) = U(\omega/2)$:

$$V\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left[X(e^{j\frac{\omega}{2}})+X(e^{j(\frac{\omega}{2}+\pi)})\right]$$

32



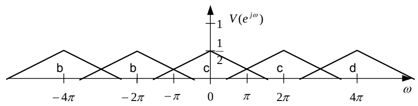
Spektar signala frekvencijski ograničenog na $\pm\pi/2$.

Spektar decimiranog signala.

33

Spektar decimiranog signala

- Da signal nije bio frekvencijski ograničen na $\pm\pi/2$, decimacija bi osim rastezanja uzrokovala i preklapanje spektara (*eng. aliasing*).



34

Decimirani signal u Z domeni

- Identičnim postupkom uz zamjenu $z = e^{j\omega}$ dobivamo sljedeće veze:

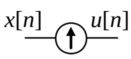
$$U(z)=\frac{1}{2}\left[X(z)+X\left(ze^{j\pi}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[X(z)+X(-z)\right]$$

$$V(z)=U\left(z^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$V(z)=\frac{1}{2}\left[X(z^{\frac{1}{2}})+X(-z^{\frac{1}{2}})\right]$$

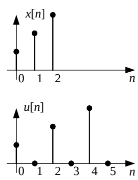
35

Ekspander



- U vremenskoj domeni:

$$u[2n]=x[n],$$
$$u[2n+1]=0.$$



36

Ekspander

$x[n] \longrightarrow \uparrow \longrightarrow u[n]$

- U frekvencijskoj domeni:

$$U(e^{j\omega}) = \sum u[n]\cdot e^{-j\omega n} = \sum u[2n]\cdot e^{-j\omega 2n}$$

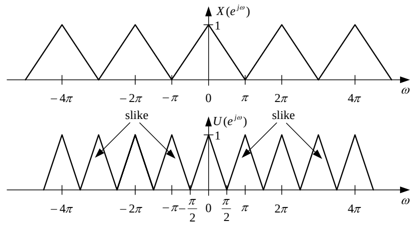
$$= \sum x[n]\cdot e^{-j\omega 2n} = X(e^{j2\omega})$$

Neparni uzorci su nula.

- Rezultat je stisnuti spektar: $U(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$,
- U Z-domeni: $U(z) = X(z^2)$.

37

Ekspander



- Spektar interpoliranog signala se suzio, a period spektra interpoliranog signala je π (ne više 2π)!
- Imamo pojavu ponavljajućih "slika" spektra.

38

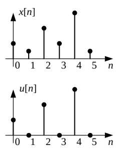
Decimator + ekspander

$x[n] \longrightarrow \downarrow \longrightarrow \uparrow \longrightarrow u[n]$

- U vremenskoj domeni: $u[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ paran}, \\ 0 & n \text{ neparan}. \end{cases}$
- Već smo pokazali da je spektar takvog signala:

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)})\right],$$

$$U(z) = \frac{1}{2}\left[X(z) + X(-z)\right].$$



39

Teme predavanja

- Motivacija za filtarske slogove.
- Filtarski slog s dva pojasa
  - uvjeti potpune rekonstrukcije,
  - energetski okvir preslikavanja.
- Primjeri:
  - filtri s konačnim impulsnim odzivom,
  - idealni pojasni filtri.
- Decimacija i ekspanzija
  - svojstva u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

40