Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

Teme predavanja

- Motivacija za nejednoliku razlučivost
- CWT – Kontinuirana wavelet transformacija
  - definicija,
  - svojstva,
  - primjeri.
- DWT - Diskretna wavelet transformacija
  - definicija,
  - svojstva,
  - DWT filtarski slog.

2

Motivacija za nejednoliku razlučivost

- Razlučivost razlaganja je kod STFT-a određena svojstvima vremenskog otvora.
- Odabrani kompromis uslijed principa neodređenosti vrijedi za cijelu T-F ravninu.
- Često jedna vremenska točka analiziranog signala ima složen frekvencijski sadržaj.
- Za takve signale bi odgovarala analiza koja nema konstantnu rezoluciju.
- U tom slučaju bi ukupno određenje složenog signala moglo biti preciznije od određenja u jednoj točki T-F ravnine.

3

Kontinuirana wavelet transformacija

- Umjesto $$g(t-\tau)\, e^{j\omega t} \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$
- $\psi(t)$ – lokalni analizirajuća funkcija željenih svojstava u obje domene, τ – pomak, a – skala.
- Rezultat: CWT.
$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$
- Za realne $\psi(t)$ ne treba konjugacija * (mi ćemo to u nastavku često podrazumijevati).

4

CWT

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$

- Rezultat $X(\tau, a)$:
  - ima dimenziju više od dimenzije signala,
  - ovisi o odabranom "valiću" $\psi(t)$,
  - funkcija razlaganja nije ograničena samo na kompleksnu harmonijsku funkciju $e^{j\omega t}$,
  - "valić" $\psi(t)$ osigurava željena svojstva razlaganja,
  - analizirajuću funkciju pomičemo za τ, stežemo ili rastežemo za skalu a i uspoređujemo s $x(t)$,
  - "skala" a je veličina obrnuto proporcionalna frekvenciji.

5

CWT, razlučivost

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$

- Otvor ψ određuje lokalizaciju u vremenu i skali.
- Pitanja:
  - gdje su centri koncentracije energije
  - i kolika je efektivna širina
- funkcija razlaganja u obje domene?

6

CWT, središta koncentracije

- Središte koncentracije energije u vremenskoj domeni:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t \left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2 dt} = \left| \begin{array}{l}\text{supst.}\\ t'=\frac{t-\tau}{a}\\ dt'=\frac{dt}{a}\end{array}\right| = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (at'+\tau)\left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(t')\right|^2 a\,dt'}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(t')\right|^2 a\,dt'}$$

$$= a\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t|\psi(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2\,dt} + \tau\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2\,dt} = at_\psi+\tau.$$

7

CWT, središta koncentracije

- Konačno, središte koncentracije energije u vremenskoj domeni je:

$$t_c = at_\psi + \tau.$$

- Čest (ali ne i jedini) izbor je ψ simetrična oko nule (t_ψ = 0), a tada je t_c = τ.
- Središte koncentracije je u potpunosti određeno vremenskim pomakom τ, a veza je linearna.

8

CWT, središta koncentracije

- U frekvencijskoj domeni imamo:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right\} \circ\!\!-\!\!\bullet \left\{\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right\}$$

- Središte koncentracije u frekvencijskoj domeni je:

$$\omega_c^+ = \frac{\int_0^{+\infty}\omega\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega}{\int_0^{+\infty}\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega} = \frac{\int_0^{+\infty}\omega|\Psi(a\omega)|^2\,d\omega}{\int_0^{+\infty}|\Psi(a\omega)|^2\,d\omega} = \frac{\omega_\Psi^+}{a}.$$

$$\omega_c^+ = \omega_\Psi^+ / a.$$

- Veza središta ω_c i skale a nije linearna!

9

CWT, efektivne širine

- Vremenska efektivna širina:

$$\Delta_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\tau)^2\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2 dt} = \ldots = a^2\cdot\Delta_\psi^2$$

$$\Delta_t = a\cdot\Delta_\psi \qquad \Delta_f = \frac{\Delta_\Psi}{a}$$

- Frekvencijska efektivna širina:

$$\Delta_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\omega_\Psi)^2\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega} = \ldots = \frac{\Delta_\Psi^2}{a^2}$$

10

CWT, razlučivost

$$t_c = at_\psi + \tau,\quad \omega_c = \frac{\omega_\Psi}{a}.$$

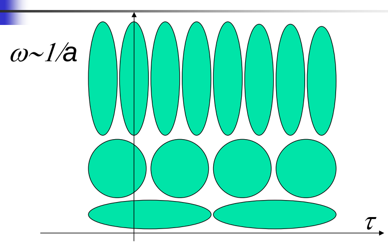
$$\Delta_t = a\cdot\Delta_\psi,\quad \Delta_f = \frac{\Delta_\Psi}{a}.$$

$$\Delta_t\cdot\Delta_f = const.$$

- Centri koncentracije energije funkcija razlaganja u obje domene su linearno ovisni o pomaku τ i nelinearno ovisni o skali *a*.
- Efektivna širina funkcija razlaganja u obje domene je promjenjiva, ali je produkt širina konstantan i određen svojstvima otvora Ψ.

11

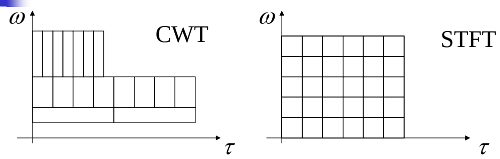
Razlučivost u T-F ravnini



- Središta elipsi predstavljaju centre funkcija razlaganja (τ, ω~$1/a$), a dimenzije efektivne širine.
- Svojstva, odnosno geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini je promjenjiva!!

12

Razlučivost: CWT i STFT

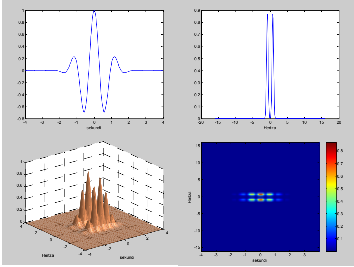


- STFT: konstantna rezolucija na cijeloj T-F ravnini.
- CWT:
  - finija rezolucija u frekvencijskoj domeni za NF,
  - finija rezolucija u vremenskoj domeni za VF.

13

Primjeri wavelet funkcija

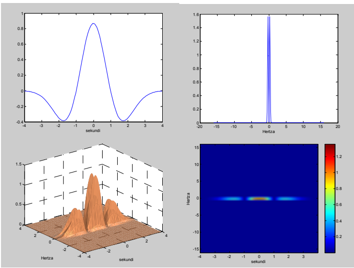
- Morlett: $\psi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\cos 5t.$



14

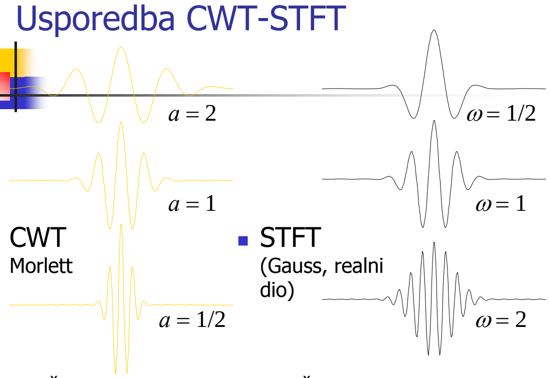
Primjeri wavelet funkcija

- Sombrero: $\psi(t)=C\left(1-t^2\right)e^{-\frac{t^2}{2}}.$



15

Usporedba CWT-STFT

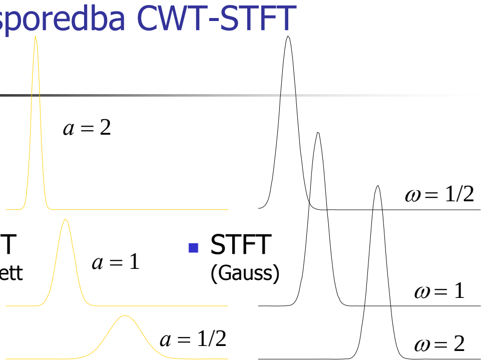


- CWT
  Morlett
- STFT
  (Gauss, realni dio)

- Širina otvora se mijenja, broj valića isti.
- Širina otvora konstantna, broj valića se mijenja.

16

Usporedba CWT-STFT



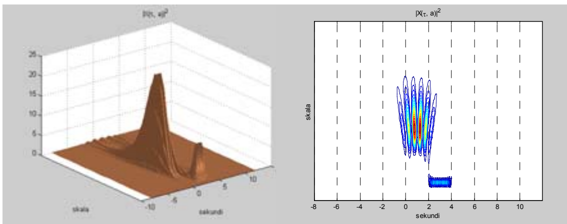
- CWT
  Morlett
- STFT
  (Gauss)

- Širina otvora se mijenja, produkt $\Delta_t\Delta_f$ je konstantan.
- Širina otvora konstantna.

17

CWT na primjeru

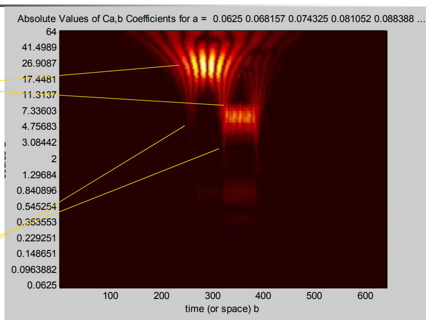
- Analizirani signal: dva sinusa, Morletov wavelet. $\psi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(5t)$



18

CWT na primjeru

lokalizacija u frekvenciji bolja za NF



Vrlo precizna lokalizacija u vremenu

19

CWT, inverzna formula

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^{*}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$

- Analogijom pretpostavimo da postoji inverzna formula oblika:

$$x(t)=\frac{1}{\mathrm{C}}\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}\int_{a=0}^{+\infty}X(\tau,a)\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)da\,d\tau$$

- gdje je C neka nepoznata konstanta.

20

CWT, inverzna formula

- Izvod je sličan ali složeniji od STFT-a, pa ga ovdje ne reproduciramo.
- Pokazuje se da nepoznata konstanta iznosi:

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^{2}}{\omega}d\omega$$

- $\Psi(\omega)$ je Fourierova transformacija od $\psi(t)$.
- Uvjet prihvatljivosti funkcije ψ ujedno je i određen gornjim izrazom ($0 < C < \infty$).

21

CWT, inverzna formula

- Lako se vidi da je za konačan iznos:

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^{2}}{\omega}d\omega$$

- nužno da je $\Psi(0) = 0$.
- Valić ne smije imati istosmjernu komponentu, odnosno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,dt=0.$$

22

CWT, transformacijski par

- Konačno imamo transformacijski par:

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^{*}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt,$$

$$x(t)=\frac{1}{\mathrm{C}}\int_{\tau}\int_{a}X(\tau,a)\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)da\,d\tau;$$

- uz ($0 < C < \infty$):

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^{2}}{\omega}d\omega,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,dt=0.$$

23

Postupak računanja CWT

- A) U Fourierovoj domeni:

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^{*}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt,$$

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\sqrt{a}\cdot\Psi(-a\omega)\,e^{-j\omega\tau}d\omega,$$

$$X(\tau,a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(-\omega)\cdot\Psi(a\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega,$$

- Dobiveni izraz je *Fourier*$^{-1}$[$X(-\omega)\Psi(a\omega)$].

24

Postupak računanja CWT

- B) Kao slog filtracija za različite skale a :

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*\left[-\frac{1}{a}(\tau-t)\right]dt,$$

- Za $a=1$ važi:

$$X(\tau,1)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*[-(\tau-t)]dt,$$

- Dobiveni izraz predstavlja konvolucijski integral funkcija $x(t)$ i $\psi^*(-t)$.

25

Postupak računanja CWT

- Konvolucija $x(t)$ i $\psi^*(-t)$ odgovara pojasnopropusnom filtriranju:

$$x \rightarrow \boxed{\Psi^*(-\omega)} \rightarrow X(\tau,1)$$

- Za $a \neq 1$ imamo:

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*\left[-\frac{1}{a}(\tau-t)\right]dt,$$

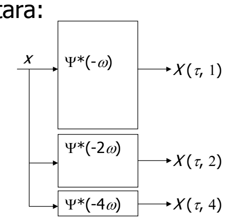
$$x \rightarrow \boxed{\Psi^*(-a\omega)} \rightarrow X(\tau,a)$$

- Pojasnopropusni filtar je promijenjene širine i središnje frekvencije.

26

CWT kao slog filtara

- Neka je a = 1, 2, 4, ...
- CWT možemo računati slogom nejednakih filtara:



Označimo središte pojasa sa ω_c i efektivnu širinu filtra sa Δ.

Središte pojasa je $\omega_c/2$, a efektivna širina je $\Delta/2$.

Središte pojasa je $\omega_c/4$, a efektivna širina je $\Delta/4$.

27

Diskretizacija WT

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt,$$

- Diskretizacija usklađena s razlučivošću:

$a=a_0^k$ - logaritamska podjela u skali (frekvenciji)

$\tau=mTa$ - pomak usklađen s iznosom skale

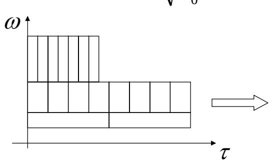
$tj.\ \tau=mTa_0^k$

28

Diskretizacija WT

Funkcije razlaganja $\quad \psi_{m,k}(t)=\frac{1}{\sqrt{a_0^k}}\psi\left(\frac{t}{a_0^k}-mT\right)$

DWT $\quad X[m,k]=\frac{1}{\sqrt{a_0^k}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi\left(\frac{t}{a_0^k}-mT\right)dt$



nejednolika kvantizacija T-F ravnine

29

Uvjet rekonstrukcije

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X[m,k]\cdot\psi_{m,k}(t)$$

- Rekonstrukcija je moguća i to na numerički stabilan način ako postoje dvije konstante A i B za koje vrijedi:

$$A\underbrace{\|x\|^2}_{energija\ signala}\le\underbrace{\sum_{m,k}\|X[m,k]\|^2}_{energija\ koeficijenata}\le B\underbrace{\|x\|^2}_{energija\ signala}$$

$$0<A\le B<\infty$$

- Kod DWT-a ne postoji ekvivalent nužnog uvjeta $T\Omega\le 2\pi$, koji je vrijedio za Gaborovu ekspanziju.

30

Oktavna DWT

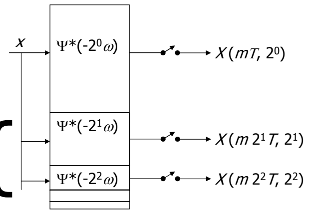
- Kod waveleta se lako mogu pronaći ortogonalne baze s dobrim lokalizirajućim svojstvima u obje domene (što nije bio slučaj s Gaborom).
- Za realizaciju čest izbor je $a_0 = 2$ tj. oktavna podjela frekvencijske skale.
- Prednost: mogućnost brze realizacije filtarskim slogovima.

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^k}}\psi\left(\frac{t}{2^k} - mT\right)$$

31

Oktavna DWT kao slog filtara

- Ponovno prikažimo CWT filtarski slog. Označimo a = 2^0, 2^1, 2^2, … i otipkamo uzorke rezultata.
- Zbrojena širina svih filtara $j > k$ jednaka je širini k - tog filtra.

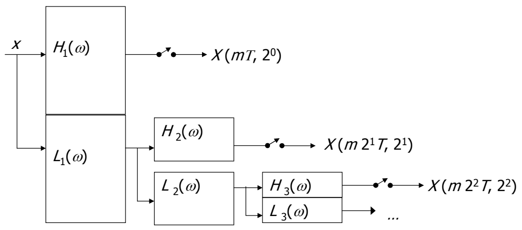


Problem: NP filtri vrlo visokog reda!

32

Oktavna DWT kao slog filtara

- Ideja za rekurzivnu realizaciju



Kaskadno realizirani filtri mogu biti značajno nižeg reda.

33

Teme predavanja

- Motivacija za nejednoliku razlučivost
- CWT – Kontinuirana wavelet transformacija
  - definicija,
  - svojstva,
  - primjeri.
- DWT - Diskretna wavelet transformacija
  - definicija,
  - svojstva,
  - DWT filtarski slog.

34