# Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

## Teme predavanja

- Motivacija za vremensko-frekvencijske obrade
- STFT – Fourierova transformacija na vremenskom otvoru
  - definicija,
  - svojstva,
  - primjeri.
- Diskretna STFT, Gaborova ekspanzija
  - definicija,
  - svojstva.

2

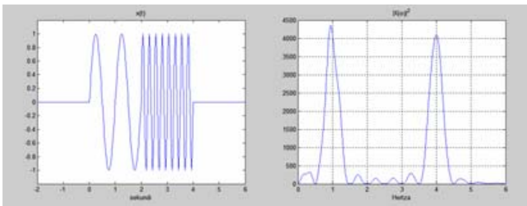
## Motivacija za T-F analizu

- Fourierova analiza daje nam uvid u frekvencijski sadržaj analiziranog signala.
- Pod pojmom "frekvencijski sadržaj" podrazumijevaju se harmonijske funkcije.
- Harmonijske funkcije nisu lokalizirane u vremenu.
- Stoga rezultat analize nema eksplicitnu vremensku dimenziju.

3

## Motivacija za T-F analizu

- Signal promjenjivih svojstava: dva sinusa.



- Vide se ili vremenski ili frekvencijski odnosi – niti jedan prikaz nije idealan.

4

## Motivacija za T-F analizu

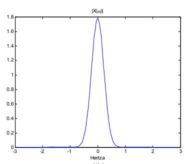
- Vremenski odnosi su ugrađeni u frekvencijsku karakteristiku, ali nisu uvijek eksplicitno vidljivi.
- Poznata mjera, koja se dobiva iz fazne karakteristike je grupno kašnjenje:

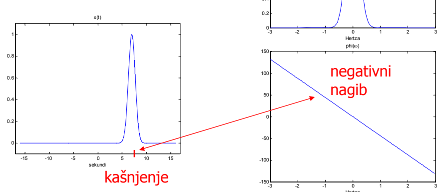
$$X(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \qquad T(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}.$$

5

## Grupno kašnjenje $T(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}.$

- Grupno kašnjenje ima jasan smisao ako se "frekvencijski sadržaj" analiziranog signala događa u jednoj vremenskoj točki.

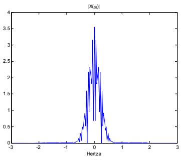


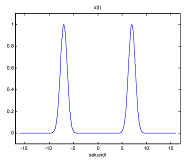


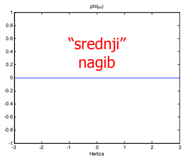

6

## Grupno kašnjenje $T(\omega) = -\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}.$

- Grupno kašnjenje nije dobra mjera ako se identični frekvencijski sadržaj analiziranog signala događa u više vremenskih točaka.








7

## Trenutna frekvencija

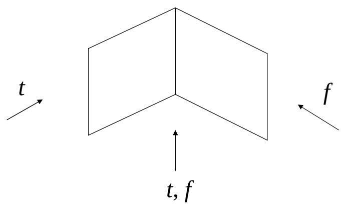
- Analogna mjera za kompleksne signale u vremenskoj domeni je trenutna frekvencija:

$$x(t) = a(t)e^{j\phi(t)}, \qquad f(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

- Njezin je smisao također upitan ako u identičnoj vremenskoj točki postoji više od jedne frekvencije u signalu.

8

## Vremensko frekvencijska (T-F) analiza




- Želimo takvu transformaciju da istovremeno opažamo vremenske i frekvencijske odnose

9

## FT na vremenskom otvoru - STFT

- Umjesto

$$e^{j\omega t} \;\rightarrow\; g(t-\tau)\,e^{j\omega t}$$

- $g(t)$ – lokalni analizirajući otvor željenih svojstava u obje domene, $\tau$ – pomak.
- Rezultat: STFT.

$$X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,g^*(t-\tau)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

- Za realne $g(t)$ ne treba konjugacija * (mi ćemo to u nastavku često podrazumijevati).

10

## STFT

$$X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,g(t-\tau)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

- Rezultat $X(\tau, \omega)$ očito:
  - ima dimenziju više od dimenzije signala,
  - ovisi o odabranom vremenskom otvoru.
- Funkcije razlaganja čine neprebrojiv i redundantan skup (po $\tau$ i $\omega$):

$$\left\{ g(t-\tau)\,e^{j\omega t} \right\}$$

11

## STFT, razlučivost

$$\left\{ g(t-\tau)\,e^{j\omega t} \right\}$$

- Uslijed otvora $g$, funkcije razlaganja su lokalizirane u vremenu i frekvenciji.
- Pitanja:
  - gdje su centri koncentracije energije
  - i kolika je efektivna širina
- funkcija razlaganja u obje domene?

12

## STFT, središta koncentracije

- Središte koncentracije energije u vremenskoj domeni:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\left|g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right|^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\left|g(t-\tau)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|g(t-\tau)\right|^2 dt}$$

- Za funkciju $g$ konačne energije supstitucijom $t' = t+\tau$ dobivamo $t_c = t_g+\tau$.
- Najčešći izbor je $g$ simetrična oko nule ($t_g = 0$), a tada je $t_c = \tau$.
- Središte koncentracije je u potpunosti određeno vremenskim pomakom $\tau$, a veza je linearna.

13

## STFT, središta koncentracije

- U frekvencijskoj domeni (oznaka $w$) imamo:

$$\left\{g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right\} \circ\!\!-\!\!\circ \left\{G(w-\omega)\,e^{j(w-\omega)\tau}\right\}$$

- Središte koncentracije u frekvencijskoj domeni je:

$$w_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} w\left|G(w-\omega)e^{j(w-\omega)\tau}\right|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|G(w-\omega)e^{j(w-\omega)\tau}\right|^2 dw} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} w\left|G(w-\omega)\right|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|G(w-\omega)\right|^2 dw} = w_G + \omega.$$

- Najčešći izbor je niskopojasni $G(w)$ simetričan oko nule ($w_G = 0$), a tada je $w_c = \omega$. Veza je linearna.

14

## STFT, efektivne širine

- Vremenska efektivna širina:

$$\Delta_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tau)^2\left|g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right|^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t')^2\left|g(t')\right|^2 dt'}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|g(t')\right|^2 dt'} = \Delta_g^2$$

- Frekvencijska efektivna širina:

$$\Delta_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (w-\omega)^2\left|G(w-\omega)\,e^{j(w-\omega)\tau}\right|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|G(w-\omega)\,e^{j(w-\omega)\tau}\right|^2 dw} = \ldots = \Delta_G^2$$

15

## STFT, razlučivost

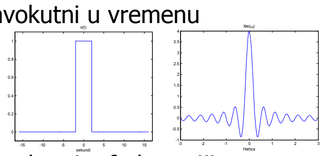
$$\left\{g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right\}$$

- Centri koncentracije energije funkcija razlaganja u obje domene su linearno ovisni o pomaku $\tau$ i frekvenciji $\omega$.
- Efektivna širina funkcija razlaganja u obje domene je konstantna i definirana svojstvima vremenskog otvora.
- Odnos širina zadaje princip neodređenosti.

16

## Izbor otvora

- Pravokutni u vremenu

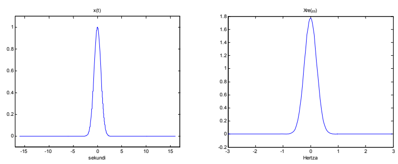


- Pravokutni u frekvenciji

17

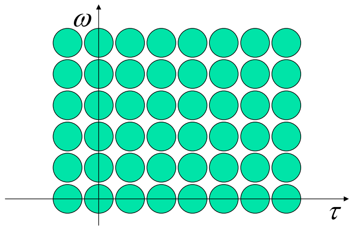
## Izbor otvora

- Idealna lokalizacija u jednoj domeni uzrokuje lošu lokalizaciju u drugoj.
- Najmanji produkt efektivnih širina daje Gaussov otvor.



18

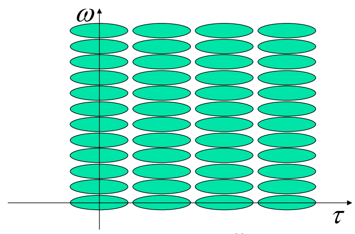
## Razlučivost u T-F ravnini




- Središta elipsi predstavljaju centre funkcija razlaganja ($\tau$, $\omega$), a dimenzije efektivne širine.
- Svojstva, odnosno geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini je konstantna.

19

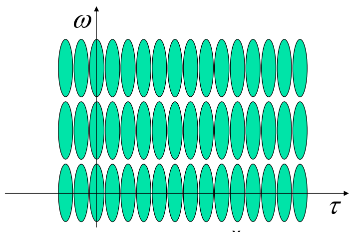
## Razlučivost u T-F ravnini




- Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije).

20

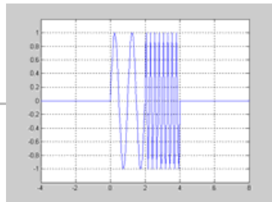
## Razlučivost u T-F ravnini

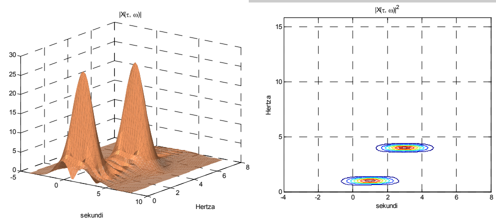



- Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije).

21

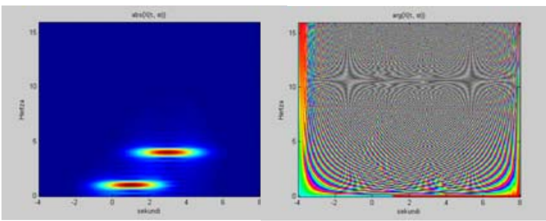
## Dva sinusa






22

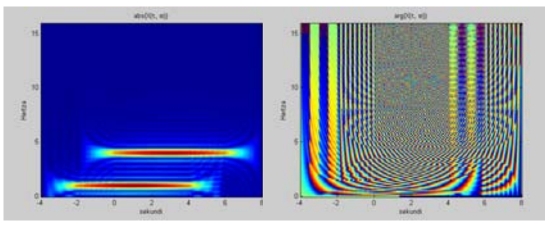
## Dva sinusa, Gaussov otvor



- Lijevo: amplituda, desno faza

23

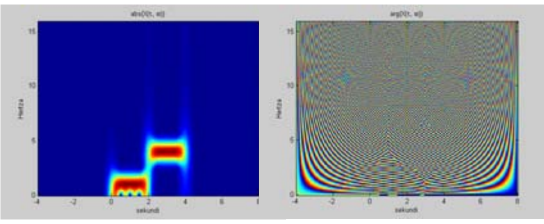
## Dva sinusa, širi Gaussov otvor



- Veća neodređenost u vremenu, manja u frekvenciji.

24

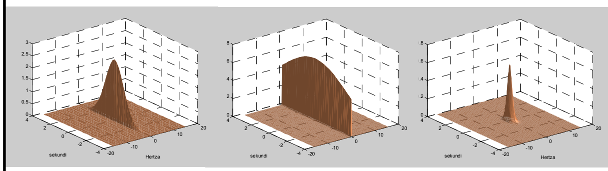
## Dva sinusa, uži Gaussov otvor



- Veća neodređenost u frekvenciji, manja u vremenu.

25

## Pripadni analizirajući otvori



- 2D funkcija koja ilustrira razlučivost korištenih otvora računa se kao $G_{2D}(t, w) = g(t)\cdot|G(w)|$.

26

## STFT, inverzna formula

$$X(\tau,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g^*(t-\tau)\,e^{-j\omega t}dt$$

- Analogijom s Fourierovim integralom, pretpostavimo da postoji inverzna formula oblika:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{C}}\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} X(\tau,\omega)\,h(t-\tau)\,e^{j\omega t}d\omega\,d\tau$$

- gdje je *h* za sada nepoznata funkcija, a C nepoznata konstanta.

27

## STFT, inverzna formula

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{C}}\int_{\tau}\int_{\omega}\overbrace{\int_{t'} x(t')g^*(t'-\tau)\,e^{-j\omega t'}dt'}^{X(\tau,\omega)}\,h(t-\tau)\,e^{j\omega t}d\omega\,d\tau$$

- Promijenimo redoslijed integracije:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{C}}\int_{t'} x(t')\underbrace{\int_{\omega} e^{-j\omega(t'-t)}d\omega}_{2\pi\delta(t'-t)}\int_{\tau} g^*(t'-\tau)h(t-\tau)\,d\tau\,dt'$$

- Integral preko Diracove funkcije lako riješimo.

28

## STFT, inverzna formula

$$x(t)=\frac{1}{\mathrm{C}}x(t)\int_{\tau} g^*(t-\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

- Očito, za jednakost mora važiti:

$$\int_{x} g^*(x)\,h(x)\,dx=\mathrm{C}$$

- Dobar izbor:

$$h(t)=g(t),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2\,dt=\|g\|^2=\mathrm{C}.$$

29

## STFT, inverzna formula

- Konačno imamo transformacijski par:

$$X(\tau,\omega)=\int_{t} x(t)g^*(t-\tau)\,e^{-j\omega t}dt,$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\|g\|^2}\int_{\tau}\int_{\omega} X(\tau,\omega)\,g(t-\tau)\,e^{j\omega t}d\omega\,d\tau;$$

- uz jedini uvjet da je otvor *g* konačne energije.
- Ako se *g* odabere takav da mu je energija jednaka 1, izraz se pojednostavljuje.

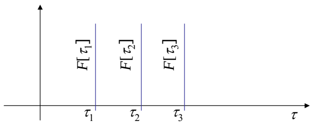
30

## Postupak računanja STFT

- A) Kao niz Fourierovih transformacija za različite vremenske pomake $\tau$:

$$X(\tau,\omega)=\int_t \left[x(t)g^*(t-\tau)\right]e^{-j\omega t}dt,$$

$$X(\tau,\omega)=Fourier\left[x(t)g^*(t-\tau)\right].$$




31

## Postupak računanja STFT

- B) Kao slog filtracija za različite frekvencijske pomake $\omega$:

$$X(\tau,\omega)=\int_t \left[x(t)\cdot e^{-j\omega t}\right]g^*(t-\tau)\,dt.$$

- Za $\omega=0$ važi:

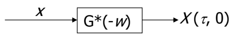
$$X(\tau,0)=\int_t x(t)\,g^*\left[-(\tau-t)\right]dt.$$

- Dobiveni izraz predstavlja konvolucijski integral funkcija $x(t)$ i $g^*(-t)$.

32

## Postupak računanja STFT

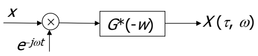
- Konvolucija $x(t)$ i $g^*(-t)$ odgovara filtriranju:




- Za $\omega\neq 0$ imamo:

$$X(\tau,\omega)=\int_t \left[x(t)\cdot e^{-j\omega t}\right]g^*\left[-(\tau-t)\right]dt.$$

- što možemo prikazati kao:

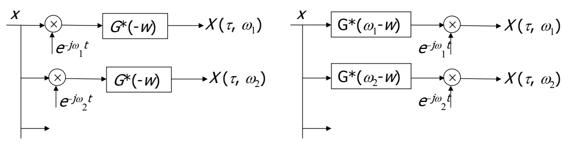



- Množenju sa $e^{-j\omega t}$ odgovara pomak u Fourierovoj domeni: $X(w+\omega)$.

33

## STFT kao slog filtara

- Jednostavnom supstitucijom frekvencijski pomak signala možemo nadomjestiti frekvencijskim pomakom filtra.
- Konačno, STFT možemo računati slogom ekvidistantnih filtara:




34

## Diskretizacija STFT

$$X(\tau,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g^*(t-\tau)\,e^{-j\omega t}dt$$

- Diskretizacija usklađena s razlučivošću:
- $\tau = mT$; $\omega = k\Omega$.

$$X\left[mT,k\Omega\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g^*(t-mT)\,e^{-jk\Omega t}dt$$

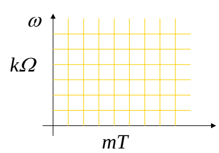
35

## Diskretizacija STFT

$$X\left[mT,k\Omega\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g^*(t-mT)\,e^{-jk\Omega t}dt$$

- Funkcije razlaganja čine prebrojiv skup:

$$\left\{g_{m,k}(t)\right\} \qquad g_{m,k}(t)=g(t-\underbrace{mT}_{\substack{\text{diskretni}\\\text{vremenski}\\\text{pomak}}})\;\underbrace{e^{jk\Omega t}}_{\substack{\text{diskretni}\\\text{frekvencijski}\\\text{pomak}}}$$




jednolika kvantizacija T-F ravnine

36

## Diskretizacija STFT

- Da li se iz diskretnog skupa koeficijenata $X[m, k]$ može restaurirati analizirani signal $x(t)$ i to na numerički stabilan način?

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X[m,k]\cdot g_{m,k}(t)$$

- Rekonstrukcijska (inverzna) formula poznata je pod nazivom Gaborova ekspanzija signala.
- $X[m,k]$ je mjera sadržaja $x(t)$ na lokaciji $mT$, $k\Omega$.
- Kada je moguća rekonstrukcija?

37

## Potrebna svojstva

- Signal konačne energije mora se preslikati u spektar konačne energije (ne nužno iste).
  - Energija signala: $$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$$
  - Energija spektra: $$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X[m,k]|^2$$
  - Uvjet vodi na formulaciju:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X[m,k]|^2\le B\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$$

B je neka pozitivna konstanta

38

## Potrebna svojstva

- Inverzna transformacija mora spektar konačne energije vratiti u signal konačne energije.
  - Uvjet vodi na formulaciju:

$$A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt\le\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X[m,k]|^2$$

A je neka pozitivna konstanta

  - Oba uvjeta zajedno:

$$A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt\le\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X[m,k]|^2\le B\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt,$$

$$0<A\le B<\infty.$$

39

## Dovoljan uvjet

- Rekonstrukcija je moguća i to na numerički stabilan način ako postoje dvije konstante A i B za koje vrijedi:

$$\mathrm{A}\underbrace{\|x\|^2}_{energija\ signala}\le\underbrace{\sum_{m,k}\|X[m,k]\|^2}_{energija\ \ koeficijenata}\le\mathrm{B}\underbrace{\|x\|^2}_{energija\ signala}$$

$$0<\mathrm{A}\le\mathrm{B}<\infty$$

- Razlaganje može biti i redundantno ili neuniformno, a konstante A i B zadaju energetski okvir transformacije (*engl. frame*).

40

## Dovoljan uvjet

- Kako u konkretnom slučaju Gaborove ekspanzije pronaći zadovoljavajuće funkcije razlaganja $\{g_{m,k}(t)\}$?
- Teoriju okvira (*eng. frame theory*) za slučaj GE, odnosno diskretne STFT, izučavali su Weyl, Heisenberg, Gabor i mnogi drugi.
- Jedan od najvažnijih rezultata je teorem otipkavanja.

41

## Nužan uvjet rekonstrukcije

- $T\Omega>2\pi$ podotipkavanje
  - rekonstrukcija nije moguća.
- $T\Omega=2\pi$ granični (kritični) slučaj
  - moguća rekonstrukcija,
  - ne mogu se postići dobra svojstva lokalizacije u obje domene.
- $T\Omega<2\pi$ nadotipkavanje
  - moguća rekonstrukcija,
  - redundantno razlaganje,
  - mogu se postići dobra svojstva u obje domene.

42

## Teme predavanja

- Motivacija za vremensko-frekvencijske obrade
- STFT – Fourierova transformacija na vremenskom otvoru
  - definicija,
  - svojstva,
  - primjeri.
- Diskretna STFT, Gaborova ekspanzija
  - definicija,
  - svojstva.

43