Napredne metode digitalne obrade signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://nmdos.zesoi.fer.hr

Teme predavanja

- Fourierova transformacija
  - Centar koncentracije energije
  - Efektivna širina, produkt širina
- Fourierov red
- FT vremenski diskretnih signala
- Diskretna Fourierova transformacija
  - DFT kao matrični operator, unitarnost

2

Fourierova transformacija

- Definicija:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)}_{signal}\ \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\substack{kompleksna\\ harmonijska\\ funkcija}}\ dt = X(\omega)$$

- $X(\omega)$ - mjera sličnosti između $x(t)$ i $e^{j\omega t}$.
- Harmonijske funkcije $\{e^{j\omega t}\}$ čine bazu razlaganja.
- Neprebrojiv skup funkcija $\{e^{j\omega t}\}$ je ortogonalan:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_1 t}\cdot e^{-j\omega_2 t}dt = 2\pi\,\delta(\omega_1-\omega_2).$$

3

Fourierova transformacija

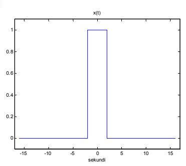
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

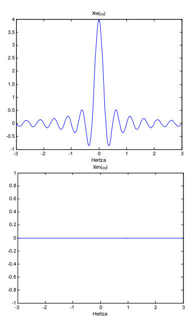
- Dovoljni (ne i nužni) uvjeti za postojanje $X(\omega)$ su:
- 1. Dirichletovi uvjeti – $x(t)$ ima konačan broj maksimuma i minimuma te konačan broj diskontinuiteta na bilo kojem konačnom intervalu od t.
- 2. apsolutna integrabilnost $x(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty.$$

4

Fourierova transformacija

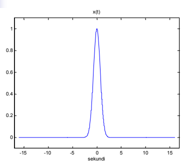


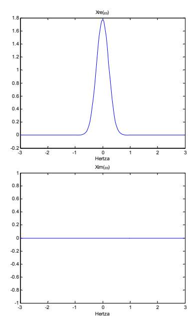


$$\int_{-W/2}^{+W/2} 1\cdot e^{-j\omega t}dt = W\frac{\sin\omega\frac{W}{2}}{\omega\frac{W}{2}}$$

5

Fourierova transformacija





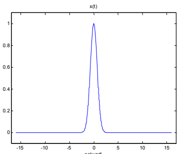
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-j\omega t}dt = a\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{a^2\omega^2}{2}}$$

a – pozitivna konstanta

6

Efektivna širina u vremenu

- Efektivna širina ili radijus funkcije:



II moment

energija

$$\Delta_{eff}^2\left[x(t)\right]=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(t-t_c)^2|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt}$$

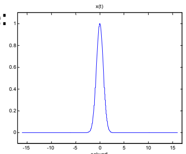
- Pri tome, centar koncentracije energije funkcije *x*(*t*) je:

$$t_c=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}t|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{a^2}}\,dt}{2\cdot\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{a^2}}\,dt}=\frac{0}{\sqrt{\pi}/\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=0.$$

7

Efektivna širina u vremenu

- Efektivna širina ili radijus funkcije:



$$\Delta_{eff}^2\left[x(t)\right]=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(t-t_c)^2|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt}$$

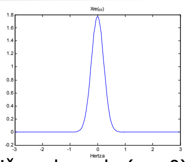
- Naša funkcija je pozitivna i simetrična oko nule (t_c=0):

$$\Delta_t^2=\frac{2\cdot\int_{0}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{a^2}}\,dt}{2\cdot\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{a^2}}\,dt}=\frac{\sqrt{\pi}/2\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}/\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{a^2}\right)}=\frac{a^2}{2}.$$

8

Efektivna širina u spektru

- Efektivna širina u *f* domeni:



$$\Delta_{eff}^2\left[X(\omega)\right]=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\omega_c)^2|X(\omega)|^2\,d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega}$$

- Spektar realan, pozitivan i simetričan oko nule (ω_c=0):

$$\Delta_\omega^2=\frac{2\cdot a\sqrt{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\omega^2\cdot e^{-a^2\omega^2}\,d\omega}{2\cdot a\sqrt{2\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\omega^2}\,d\omega}=\frac{\frac{\sqrt{2\pi}}{2a^2}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{2a^2}.$$

- Napomena: ako spektar nije simetričan oko nule (nije NP već PP), središte i efektivna širina se posebno mjere za pozitivne, odnosno negativne frekvencije.

9

Produkt efektivnih širina

- Efektivne širine u dvije domene:

$$\Delta_t=\frac{a}{\sqrt{2}},\ \Delta_\omega=\frac{1}{\sqrt{2}a}$$

- Produkt širina je konstanta:

$$\Delta_t\cdot\Delta_\omega=\frac{1}{2}.$$

- Heisenbergov princip neodređenosti
  - Za svaki transformacijski par *x*(*t*), *X*(ω) vrijedi:

$$\Delta_t\cdot\Delta_\omega\geq\frac{1}{2},\qquad\left(\Delta_t\cdot\Delta_f\geq\frac{1}{4\pi}\right)$$

  - a za Gaussovu funkciju je produkt širina minimalan (=1/2).

10

Inverzna Fourierova transformacija

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

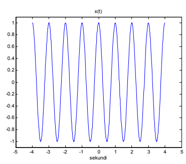
- Signal *x*(*t*) moguće je potpuno rekonstruirati iz *X*(ω).
- Fourierova transformacija čuva energiju signala (Parsevalov teorem):

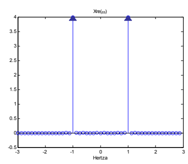
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega$$

11

Fourierova transformacija

- Harmonijski signal: nije zadovoljen uvjet apsolutne integrabilnosti (samo po periodu).



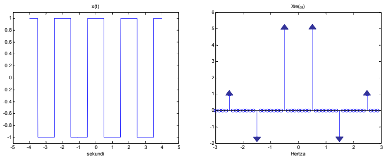


$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\Omega t\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\ \pi\left[\delta(\omega+\Omega)+\delta(\omega-\Omega)\right]$$

12

Fourierova transformacija

- Pravokutni ili neki drugi periodički signal: nije zadovoljen uvjet apsolutne integrabilnosti.



$$X(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)}\left[\delta(\omega+(2n+1)\Omega)+\delta(\omega-(2n+1)\Omega)\right]$$

13

Fourierov red

- Puno prikladniji za analizu periodičkih signala $x_T(t+T) = x_T(t)$.
- Koeficijente Fourierovog reda računamo modificiranim Fourierovim integralom gdje integriramo samo po jednom periodu T i to za diskretne frekvencije (višekratnike od Ω).
- Definicija:

$$\omega \to n\Omega, \quad \Omega = 2\pi / \mathrm{T}$$

$$X[n]=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} x_{\mathrm{T}}(t)\, e^{-jn\Omega t}dt$$

koeficijenti Fourierovog reda

14

Fourierov red

$$x_{\mathrm{T}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X[n]\cdot e^{jn\Omega t}$$

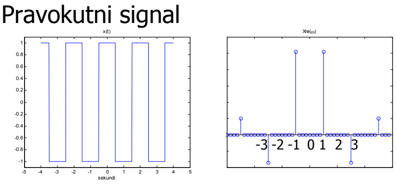
- Periodički signal možemo potpuno rekonstruirati iz koeficijenata reda.
- Ovdje je skup funkcija razlaganja prebrojiv, ortogonalan i važi Parsevalov teorem:

$$\int_0^{\mathrm{T}}|x_{\mathrm{T}}(t)|^2\, dt=\mathrm{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|X[n]|^2$$

15

Fourierov red, primjer

- Pravokutni signal



$$x(t)=\frac{4}{\pi}\left(\cos\Omega t+\frac{\cos 3\Omega t}{3}+\frac{\cos 5\Omega t}{5}+\dots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\Omega t}{(2n+1)}$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\Omega t}{(2n+1)} \qquad X[2n+1]=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1},\ X[2n]=0.$$

16

Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

- Definicija:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n} \quad = \quad X\left(e^{j\omega}\right)$$

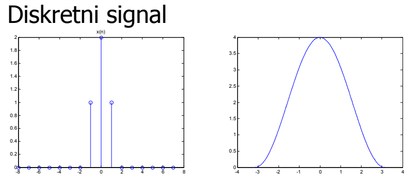
- Neprebrojiv ortogonalan skup harmonijskih funkcija $\{e^{j\omega n}\}$ čini bazu razlaganja.
- $X(e^{j\omega})$ - spektar periodičan s periodom 2π.
- Inverzna transformacija:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

17

Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

- Diskretni signal



$$x[n]=\dots 0,0,1,\underline{2},1,0,0,\dots$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=1\cdot e^{-j\omega(-1)}+2\cdot e^{j\omega 0}+1\cdot e^{-j\omega 1}=2+2\cos\omega.$$

18

Diskretna Fourierova transformacija (DFT)

- Definicija:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X[k]$$

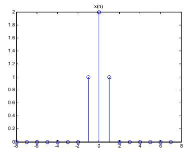
- Prebrojiv, ortogonalan skup funkcija razlaganja.
- $x(n)$ i $X(k)$ - periodični s periodom N.
- Inverzna transformacija:

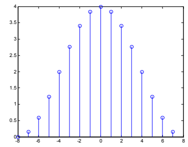
$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

19

Diskretna Fourierova transformacija (DFT)

- Diskretni signal i transformacija





$$x[n] = \{0,0,0,0,0,0,0,1,\underline{2},1,0,0,0,0,0,0\}_{16}$$

$$X[k] = 1\cdot e^{-j\frac{2\pi}{16}k(-1)} + 2\cdot e^{j\frac{2\pi}{16}k\cdot 0} + 1\cdot e^{-j\frac{2\pi}{16}k\cdot 1} = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{16}k.$$

20

DFT, matrični prikaz

- Neka je N=4: $x[n] = \{x[0], x[1], x[2], x[3]\}_4$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$X[0] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{N}0\cdot 0} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot 0} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot 0} + x[3]e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot 0},$$
$$X[1] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{N}0\cdot 1} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot 1} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot 1} + x[3]e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot 1},$$
$$X[2] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{N}0\cdot 2} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot 2} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot 2} + x[3]e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot 2},$$
$$X[3] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{N}0\cdot 3} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot 3} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot 3} + x[3]e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot 3}.$$

21

DFT, matrični prikaz

- Prethodne 4 jednadžbe se mogu matrično zapisati:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}} & e^{-j\frac{4\pi}{4}} & e^{-j\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{4}} & e^{-j\frac{8\pi}{4}} & e^{-j\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{-j\frac{6\pi}{4}} & e^{-j\frac{12\pi}{4}} & e^{-j\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

- Linearni operator koji definira DFT preslikavanje $x \rightarrow X$ je N x N matrica.

22

DFT, matrični prikaz

- U našem primjeru, to je matrica $\mathbf{W}_4$:

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

- Općenito:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad \mathbf{W}_N = \left[W_N^{km}\right]$$

23

Očuvanje energije

- Pitanje: da li matična transformacija $X = Ax$ čuva energiju signala?

$$E_x = x^{*T}\cdot x \;\overset{?}{\longleftrightarrow}\; E_X = X^{*T}\cdot X$$

$$E_X = (Ax)^{*T}\cdot Ax = x^{*T}A^{*T}\cdot A\,x$$

- Ako je $A^{*T}A = I$, onda je $E_X = E_x$ i to neovisno o x, tj. vrijedi Parsevalov teorem.
- U širem smislu, možemo dozvoliti i proporcionalnost $A^{*T}A = cI$.

24

Unitarne matrice

- Za svaku matricu za koju važi:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}*} \cdot \mathbf{A} = c \cdot \mathbf{I} \qquad \text{za neki } c > 0.$$

- kažemo da je unitarna.
- Stupci takve matrice su međusobno ortogonalni, a norma im je ista: $\sqrt{c}$
- Takve matrice je lako invertirati:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{c} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}*}$$

- Nadalje, simetrične unitarne matrice ne treba ni transponirati.

25

DFT, unitarna matrica

- Pokazuje se da je DFT matrica

$$W_{\mathrm{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}} \qquad \mathbf{W}_{\mathrm{N}} = \left[W_{\mathrm{N}}^{km}\right]$$

- unitarna.

$$\mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}*} \cdot \mathbf{W}_{\mathrm{N}} = \mathrm{N}\,\mathbf{I}$$

- Kako je i simetrična, vrijedi: $\mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{N}} \mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{*}$
- Inverzna DFT matrica dobiva se običnom konjugacijom i dijeljenjem s N!

26

DFT, unitarna matrica

- Naravno, to odgovara poznatom izrazu:

$$x[n] = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}$$

- Za sve unitarne matrice vrijedi da su im magnitude svojstvenih vrijednosti jednake i iznose $\sqrt{c}$ (za DFT to je $\sqrt{\mathrm{N}}$).
- Parsevalov teorem (očuvanje energije) možemo promatrati kao posljedicu unitarnosti operatora transformacije.

27

FT varijante i unitarnost

- Svaka od varijanti Fourierove transformacije definira po jedan linearni operator: preslikavanje iz vektorskog prostora neke klase signala u vektorski prostor domene transformacije.
- Iako se pripadni operatori uvijek ne mogu predstaviti konačnim matricama, za sve FT varijante vrijedi da se radi o unitarnim transformacijama.

28

Teme predavanja

- Fourierova transformacija
  - Centar koncentracije energije
  - Efektivna širina, produkt širina
- Fourierov red
- FT vremenski diskretnih signala
- Diskretna Fourierova transformacija
  - DFT kao matrični operator, unitarnost

29