L8. Wavelet filtarski slogovi

Uvod

Na predavanjima i vježbama ste naučili projektirati decimirane filtarske slogove s potpunom rekonstrukcijom.

Rekurzivnom primjenom decimiranog filtarskog sloga u vlastitoj niskopropusnoj grani dobivamo filtarski slog s potpunom rekonstrukcijom oblikovan u wavelet stablo. U praksi radimo konačan broj rekurzija, odnosno razina razlaganja *N*. Takvu strukturu možemo nazvati wavelet filtarskim slogom ako pridružene funkcije razlaganja konvergiraju u neke prihvatljive glatke funkcije za $N \to \infty$.

Na ovim vježbama krenut ćemo od poznatog db2 filtarskog sloga i uvjeriti se da od njega možemo dobiti wavelet filtarski slog.

Modifikacijom db2 sloga napravit ćemo dvije varijante filtarskog sloga s potpunom rekonstrukcijom (od kojih će jedan čak biti i ortogonalan) ali za koje ne vrijedi nužan ili dovoljan uvjet konvergencije. Uvjerit ćemo se da se da pridružene funkcije razlaganja ne konvergiraju, te da ne možemo govoriti o wavelet filtarskom slogu.

DB2 filtarski slog

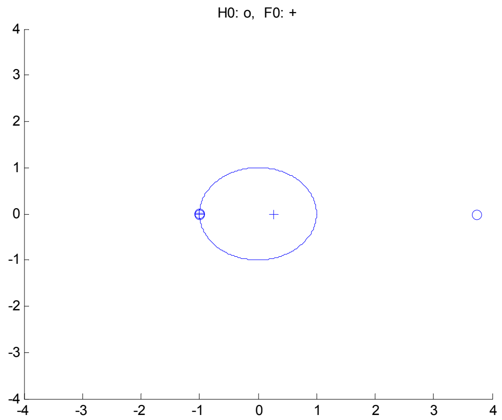
Za db2 filtarski slog, produkt filtar $P_0(z)$ je maksimalno gladak filtar

$$P_0(z) = \left(1 + z^{-1}\right)^4 Q_2(z) \tag{1}$$

sa četverostrukom nultočkom u $z=-1$. Uvjet PR traži da $P(z) = z^3 P_0(z)$ bude polupojasni filtar, odnosno da koeficijenti uz parne potencije od z budu 0, a da konstantni član bude 2. Taj uvjet vodi na sustav od jednadžbi koji određuje polinom $Q_2(z)$:

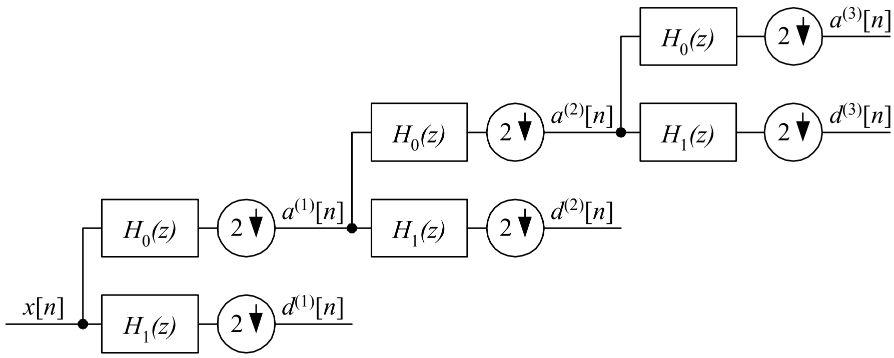
$$q_0 = -\frac{1}{16}, q_1 = \frac{1}{4}, q_2 = \frac{1}{16}. \tag{2}$$

Odabiremo filtre $H_0(z)$ i $F_0(z)$ takve da zadovoljavaju uvjet $P_0(z) = F_0(z) \cdot H_0(z)$ te uvjet ortogonalnosti $F_0(z) = z^{-3} H_0(-z^{-1})$. Faktorizaciju je najlakše uraditi uz prikaz nultočaka u *z*-domeni:



Biramo $H_0(z) = k_1\left(1 + z^{-1}\right)^2\left(c - z^{-1}\right)$, a konstanta $c = 2-\sqrt{3}$ odgovara jednoj od nultočaka $Q_2(z)$.

Rekurzivnom primjenom filtarskog sloga u vlastitoj niskopropusnoj grani dobivamo wavelet stablo. Analizirajuća strana je prikazana slikom:



Funkcije razlaganja po razinama su određene prijenosnim funkcijama:

$$H_0^{(N)}(z)=\prod_{i=1}^{N-1}H_0(z^{2^i})\qquad H_1^{(N)}(z)=H_1(z^{2^{N-1}})\prod_{i=1}^{N-2}H_0(z^{2^i}) \tag{3}$$

odnosno pripadnim impulsnim odzivima filtara. Da bi provjerili konvergenciju, na vježbama ćete crtati pridružene wavelet funkcije i funkcije skale u više razina. To su kontinuirane funkcije konstantne po odsječcima, a za crtanje ćete koristiti MATLAB funkciju *stairs*().

$$\begin{aligned}\varphi_N(t)&=2^{N/2}h_{0N}[n], &\quad \frac{n}{2^N}\le t<\frac{n+1}{2^N},\\ \psi_N(t)&=2^{N/2}h_{1N}[n], &\quad \frac{n}{2^N}\le t<\frac{n+1}{2^N}.\end{aligned} \tag{4}$$

Nužan uvjet konvergencije pridružene wavelet funkcije zahtjeva da $H_0(z)\big|_{z=-1}=0$. Taj je uvjet očito ispunjen, jer $H_0(z)$ ima dvostruku nultočku u z=–1. Nadalje, traži se da $H_0(z)\big|_{z=1}=\sqrt{2}$. Taj uvjet određuje konstantu k_1.

$$H_0(z)\big|_{z=1}=\sqrt{2}\quad\leftrightarrow\quad\sum_{n=0}^{2}h_0[n]=\sqrt{2}. \tag{5}$$

Slijedi $k_1 = -0.483$. Dovoljan uvjet konvergencije traži da $H_0(z)$ nema nultočaka na jediničnoj kružnici za $0\le|\theta|<\pi/2$, što je također ispunjeno.

Modificirani filtarski slogovi

Konstruiramo filtarske slogove s poptunom rekonstrukcijom koji **ne** zadovoljavaju uvjete konvergencije. Jedan nema nultočaka u z=–1, drugi ima nultočaka na jediničnoj kružnici za $0\le|\theta|<\pi/2$. Prvi je čak ortogonalan, ali niti jedan ne rezultira wavelet filtarskim slogom.