L6. Filtarski slogovi s decimacijom i interpolacijom

Uvod

Na vježbama ćete za zadani signal provjeriti učinak decimacije i interpolacije za faktor M u spektralnoj domeni.

Za zadani filtarski slog s dvije grane, decimacijom i interpolacijom, provjerit ćete da li dolazi do poništenja aliasinga među granama i da li filtarski slog ima svojstva potpune rekonstrukcije.

Decimacija i interpolacija za faktor M

Decimacija je postupak odbacivanja uzoraka signala. Oznaka (↓M) ili simbol

$$x[n] \longrightarrow \underset{\mathrm{M}}{\textcircled{\downarrow}} \longrightarrow v[n]$$

predstavlja decimaciju s faktorom M.

U vremenskoj domeni to znači v[k] = x[Mk].

Decimaciju u MATLAB-u za faktor M možemo obaviti indeksiranjem: xd = x(1:M:*length*(x)).

U spektralnoj domeni to znači:

$$V\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M}\left[X\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right)+X\left(e^{j\left(\frac{\omega+2\pi}{M}\right)}\right)+\cdots+X\left(e^{j\left(\frac{\omega+2\pi(M-1)}{M}\right)}\right)\right]. \tag{1}$$

Interpolacija je postupak dodavanja nula između uzoraka signala. Oznaka ↑M ili simbol

$$x[n] \longrightarrow \underset{\mathrm{M}}{\textcircled{\uparrow}} \longrightarrow u[n]$$

predstavlja interpolaciju s faktorom M.

U vremenskoj domeni to znači u[Mk] = x[k] a inače 0.

Interpolaciju u MATLAB-u za faktor M možemo obaviti kao: xi = zeros(1, M*length(x)); xi(1:M:M**length*(x)) = x;

U spektralnoj domeni to znači:

$$U\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{jM\omega}\right). \tag{2}$$

Spektar decimiranog pa zatim interpoliranog signala za faktor M iznosi:

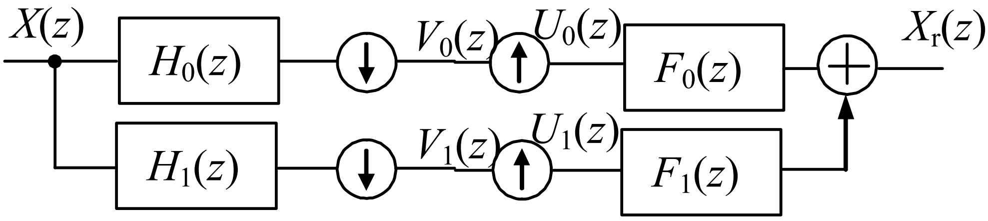
$$U\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{M}\right)}\right)+\cdots+X\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{M}(M-1)\right)}\right)\right]. \tag{3}$$

Dakle, spektar takvog signala možemo dobiti zbrajanjem spektara originalnog signala i pomaknutih replika za višekratnike od 2π/M, u što ćete se uvjeriti na vježbama.

Nadalje, spektar decimiranog signala (1) može se dobiti iz (3) rastezanjem za faktor M, u što ćete se također uvjeriti na vježbama.

Decimirani filtarski slog

Za zadani filtarski slog provjerit ćete poništenje *aliasinga* među granama sloga, te svojstvo potpune rekonstrukcije.



Na predavanjima smo pokazali da je:

$$U_0(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)\right].$$
$$U_1(z) = \frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)\right]. \tag{4}$$

Za potpunu rekonstrukciju mora vrijediti:

$$F_0(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)\right] +$$
$$F_1(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)\right] = z^{-L}X(z) \tag{5}$$

Na vježbama ćete provjeriti da li za zadanu četvorku filtara dolazi do poništenja *aliasinga*:

$$F_0(z)\left[H_0(-z)X(-z)\right] + F_1(z)\left[H_1(-z)X(-z)\right] = 0\cdot X(-z), \tag{6}$$

odnosno:

$$F_0(z)\cdot H_0(-z) + F_1(z)\cdot H_1(-z) = 0. \tag{7}$$

Nadalje, provjerit ćete na primjeru da li se radi o sustavu s potpunom rekonstrukcijom:

$$x_r[n] = x[n-L], \tag{8}$$

odnosno da li uz (7) vrijedi i:

$$F_0(z)\cdot H_0(z) + F_1(z)\cdot H_1(z) = 2z^{-L}. \tag{9}$$