L5. Filtarski slogovi

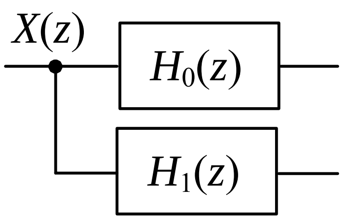
Uvod

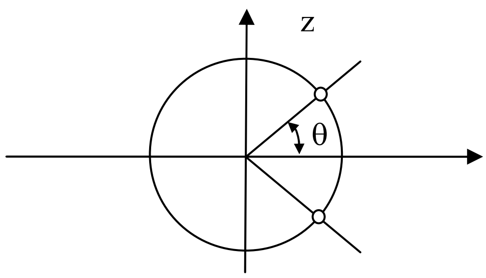
Na vježbama ćete projektirati filtarski slog s dva filtra bez decimacije. Neka od predloženih rješenja omogućavat će potpunu rekonstrukciju, dok druga neće. Sami ćete izračunati rekonstrukcijske filtre, provjeriti energetski okvir razlaganja i primijeniti filtarski slog na odabrani signal.

Nadalje, za zadani signal provjerit ćete učinak decimacije i interpolacije u spektralnoj domeni.

Filtarski slog

Projektirat ćemo filtarski slog u kojem visokopropusni filtar $H_0(z)$ ima dvije nul-točke na jediničnoj kružnici:





$$\begin{aligned} H_0(z) &= K \cdot \left(z - e^{j\theta}\right)\left(z - e^{-j\theta}\right), \\ H_0(z) &= K \cdot \left(z^2 - z \cdot 2\cos\theta + 1\right). \end{aligned} \tag{1}$$

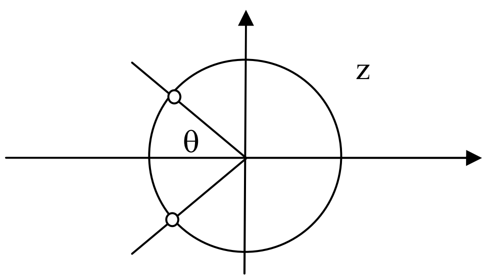
Visokopropusni filtar $H_0(z)$ ima konačni impulsni odziv dužine 3 uzorka. Konstantu K možemo zadati uvjetom da za maksimalnu frekvenciju u sustavu $\omega=\pi$ prijenosna funkcija visokopropusnog filtra $H_0(z)$ bude jednaka 1.

$$\begin{aligned} z = e^{j\pi} &= -1, \\ K \cdot \left(1 + 1 \cdot 2\cos\theta + 1\right) &= 1, \\ K &= \frac{1}{2\left(1 + \cos\theta\right)}. \end{aligned} \tag{2}$$

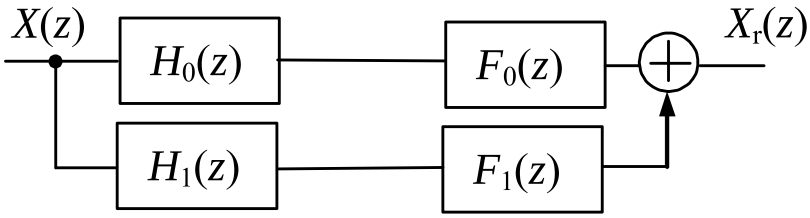
Niskopropusni filtar dobit ćemo iz visokopropusnog pomakom frekvencijske karakteristike za π, što u vremenskoj domeni odgovara množenju s $e^{j\pi n} = (-1)^n$. Dakle, svakom drugom uzorku impulsnog odziva treba promijeniti predznak. U našem slučaju to se odnosi samo na srednji:

$$H_1(z) = K \cdot \left(z^2 + z \cdot 2\cos\theta + 1\right). \tag{3}$$

Pozicije nula tako dobivenog visokopropusnog i polaznog niskopropusnog filtra zrcalno su simetrične u odnosu na imaginarnu os:



Projektirat ćemo rekonstrukcijske filtre. Na izlazu filtarskog sloga s potpunom rekonstrukcijom mora biti zakašnjela replika ulaznog signala.



$$
\begin{aligned}
X_r(z) &= z^{-L} X(z) \\
F_0(z)\cdot H_0(z) + F_1(z)\cdot H_1(z) &= z^{-L}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Neka su rekonstrukcijski filtri s konačnim impulsnim odzivom dužine 3 uzorka. Tada je ukupni impulsni odziv filtarskog sloga dužine 3+3-1=5 uzoraka. Zgodno je tražiti simetrično rješenje, $h[n]$ = {$\underline{0}$, 0, 1, 0, 0}, odnosno L=2.

Jednadžbe (4) možemo izraziti i u vremenskoj domeni:

$$
\begin{aligned}
x_r(n) &= x(n-2) \\
\sum_{k=0}^{2} f_0[k]\cdot h_0[n-k] + \sum_{k=0}^{2} f_1[k]\cdot h_1[n-k] &= h[n]
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Za $n \in$ {0, 1, 2, 3, 4, 5} dobivamo 5 jednadžbi, koje možemo matrično zapisati:

$$
\begin{bmatrix}
h_0[0] & & & h_1[0] & & \\
h_0[1] & h_0[0] & & h_1[1] & h_1[0] & \\
h_0[2] & h_0[1] & h_0[0] & h_1[2] & h_1[1] & h_1[0] \\
 & h_0[2] & h_0[1] & & h_1[2] & h_1[1] \\
 & & h_0[2] & & & h_1[2]
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} f_0[0] \\ f_0[1] \\ f_0[2] \\ f_1[0] \\ f_1[1] \\ f_1[2] \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\qquad (6)
$$

Imamo sustav od 5 jednadžbi sa 6 nepoznanica. Očigledno, postoji više mogućih rješenja. Jedan od parametara filtara možemo slobodno izabrati i onda riješiti jednadžbe.

Drugi je način da sustav riješimo korištenjem pseudo inverzije matrice. Ako sustav $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima premalo ili previše jednadžbi, možemo potražiti rješenje sustava: $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{b}$, odnosno $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{b}$. Izraz $(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T$ naziva se pseudo inverzijom matrice **A**.

Očigledno ga se može izračunati i za matrice koje nisu kvadratne, a u MATLAB-u je realiziran funkcijom *pinv*().

Za sustave s premalo jednadžbi, kakav je naš, tako dobiveni rezultat **x** je između svih mogućih rješenja rješenje najmanje energije. Za sustave s previše jednadžbi dobiva se rezultat **x** s najmanjom energijom pogreške ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{b}$). Stoga je $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{b}$ poznat kao rješenje u smislu najmanjih kvadrata (*eng. least squares solution*).

Rang matrice (broj nezavisnih jednadžbi) je važan za provjeru hoće li potpuna rekonstrukcija s tako izračunatim filtrima biti moguća. U MATLAB-u se rang matrice može procijeniti funkcijom *rank*().

Decimacija i interpolacija

Decimacija je postupak odbacivanja uzoraka signala. Oznaka ($\downarrow$2) ili simbol

$x[n] \longrightarrow (\downarrow) \longrightarrow v[n]$ predstavlja decimaciju s faktorom 2.

U vremenskoj domeni to znači v[k] = x[2k].

Ako je spektar ulaznog signala ograničen na $\pi/2$, onda spektar decimiranog signala promatran na intervalu $\omega = [-\pi, \pi]$ iznosi $X(\omega/2)$.

Na vježbama ćemo frekvencijski ograničen signal x generirati tako da uzmemo bijeli šum, a onda ga u frekvencijskoj domeni oblikujemo odgovarajućom težinskom funkcijom $W_1(\omega)$. Nakon vraćanja u vremensku domenu dobivamo signal željenog spektra.

Decimaciju u MATLAB-u možemo obaviti indeksiranjem: xd = x(1:2:*length*(x)) ili korištenjem funkcije *dyadown*().

Uvjerit ćete se kako se originalni frekvencijski ograničeni spektar signala $X(\omega)$ **raširio**.

Međutim, ako spektar nije bio ograničen na $\pi/2$ dolazi do pojave **preklapanja spektara** (*eng. aliasing*).

Na vježbama ćemo generirati slučajni signal takvog spektra koji se nalazi isključivo u području *aliasinga*: od $\pi/2$ do π. Težinska funkcija bit će $W_2(\omega) = W_1(\omega-\pi)$.

Uvjerit ćemo se da je spektar nakon decimacije u tom slučaju **istog oblika** kao prethodni.

Dakle, $X(\omega)$ i $X(\omega-\pi)$ daju nakon decimacije **iste** komponente raširenog spektra. Konačno imamo: $V(\omega) = 1/2\ [X(\omega/2) + X(\omega/2-\pi)]$.

Na vježbama ćemo za provjeru tog izraza koristiti decimirani signal iz prvog primjera. Njegov spektar nije ograničen i nakon **ponovne** decimacije doći će do *aliasinga*. Ukupan spektar je zbroj raširene i pomaknute raširene komponente, a podešen je tako da rezultat bude bijel.

Interpolacija je postupak dodavanja nula između uzoraka signala. Oznaka $\uparrow$2 ili simbol

$x[n] \longrightarrow (\uparrow) \longrightarrow u[n]$ predstavlja interpolaciju s faktorom 2.

U vremenskoj domeni to znači $u[2k] = x[k]$ i $u[2k+1] = 0$.

Spektar interpoliranog signala se stisnuo: $V(\omega) = X(2\omega)$. Naravno, novi spektar je periodičan s π, a ne sa 2π, pa imamo **još jednu sliku** spektra! Ta je pojava suprotna od *aliasinga*, a u to ćete se uvjeriti na vježbama.

Ako interpoliramo prethodno decimirani signal u = ($\uparrow$2)($\downarrow$2) x, imamo $U(\omega) = 1/2\ [X(\omega) + X(\omega-\pi)]$. Očekivano, umetanje nula umjesto svakog drugog uzorka uzrokuje *aliasing* preko polovice spektra signala.