L2. Fourierova transformacija. Razlučivost u vremensko-frekvencijskoj ravnini. DFT matrica.

Uvod

Na kolegiju NMDOS upoznat ćete se s nizom linearnih transformacija: STFT, GE, CWT, DWT, … kao i s razlaganjima signala filtarskim slogovima. Da bismo u potpunosti shvatili svojstva navedenih transformacija, na ovoj vježbi ćemo detaljno proučiti svojstva poznatih transformacija: DFT-a i drugih varijanata Fourierove transformacije.

DFT je posebno prikladna za razumijevanje jer se može predstaviti matričnim operatorom. Na vježbama ćete sami konstruirati DFT matricu, koristiti je za transformaciju signala, ispitati je i geometrijski interpretirati njezina svojstva.

Nadalje, definirat ćemo razlučivost u vremenskoj i frekvencijskoj domeni i provjeriti njihove odnose za zadane signale.

DFT kauzalnih i nekauzalnih odsječaka perioda

Diskretna Fourierova transformacija (DFT) definirana je sljedećim izrazom:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}, \qquad (1)$$

dok je izraz za inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju (IDFT):

$$x[n]=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}X[k]e^{j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}. \qquad (2)$$

Za numeričko izračunavanje DFT-a u MATLAB-u služi funkcija fft(), dok je inverzna funkcija ifft().

Primjer 1:
x = [1 1 2 2 1];
X = fft(x)
X =
7.0000 -1.6180 0.6180 0.6180 -1.6180

Primjer 2:
x = [1 -1 2 -1];
X = fft(x)
X =
1 -1 5 -1

Važna je činjenica da DFT podrazumijeva da je signal *x* periodičan niz perioda *N*, a rezultat je (općenito) kompleksan i periodičan niz, također perioda *N*. Transformacijska formula se primjenjuje na jednom periodu signala.

Primjer 1:
x = [1 1 2 2 1];
ustvari znači:
x = $\{1\ 1\ 2\ 2\ 1\}_5$
= {…, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, …}

Primjer 2:
x = [1 -1 2 -1];
ustvari znači:
x = $\{1\ -1\ 2\ -1\}_4$ =
{…, 1, -1, 2, -1, 1, -1, 2, -1, 1 …}

Podcrtan je uzorak koji odgovara koraku *n*=0.

Periodičko proširenje važi i za rezultat *X* u domeni transformacije.

U oba je primjera rezultat u domeni transformacije realan. Razlog je simetričnost ili parnost analiziranog signala oko nultog koraka:

{…, 1, -1, 2, -1, 1, -1, 2, -1, 1, …}.

Analizirajuće funkcije su harmonijske:

$$e^{j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}=\cos\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk+j\sin\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk,$$

a realni dio rezultata korespondira s parnim, odnosno simetričnim komponentama signala (kosinus je parna funkcija), dok imaginarni dio korespondira s neparnim, odnosno antisimetričnim komponentama signala (sinus je neparan).

Uočimo da smo funkciji fft() kao argument proslijedili kauzalni odsječak periodičkog niza {x[0], x[1], x[2], x[3] , x[4]}, gdje je varijabla koraka $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Simetričnost oko nultog uzorka nije direktno vidljiva iz takvih odsječaka:

Primjer 1: x = [1 1 2 2 1];

Primjer 2: x = [1 -1 2 -1];

Zgodniji je prikaz istog signala nekauzalnim odsječkom perioda simetričnim oko nule:

Primjer 1: {x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2] } = [2 1 1 1 2];

Primjer 2: {x[-2], x[-1], x[0], x[1] } = {2, -1, 1, -1}

Uočimo da za parne N uzimamo jedan uzorak više s negativnim korakom.

Vezu između ova dva odsječka signala osigurava MATLAB funkcije fftshift() i ifftshift():

Primjer 1:

```
fftshift([1 1 2 2 1])   % u nekauzalan oblik
ans =
    2    1    1    1    2
ifftshift([2 1 1 1 2])  % u kauzalan oblik
ans =
    1    1    2    2    1
```

Primjer 2:

```
fftshift([1 -1 2 -1])   % u nekauzalan oblik
ans =
    2   -1    1   -1
ifftshift([2 -1 1 -1])  % u kauzalan oblik
ans =
    1   -1    2   -1
```

Identične veze i korištenje funkcija fftshift() i ifftshift() važe i za rezultat transformacije *X*.

Za potrebe prikaza, ili prilikom zadavanja signala redovito ćemo raditi s nekauzalnim odsječcima. Kod primjene fft() ili ifft() redovito radimo s odgovarajućim kauzalnim odsječcima signala ili spektra.

Primjer:

```
n = [-16:15];                   % zadaje vektor koraka u rasponu -16 do 15
x = exp(-abs(n));               % zadaje simetričnu funkciju x
plot(n, x);                     % crta funkciju
x_kauzalni = fftshift(x);       % uzima kauzalni odsjecak istog signala
X = fft(x_kauzalni);            % racuna DFT
X_simetricni = fftshift(X);     % razmjesta X tako da uzorak uz w=0 bude u sredini
w = [-pi: pi / 16: pi-pi/16];   % zadaje vektor frekvencija u rasponu –pi do pi
plot(w, abs(X_simetricni));     % crta amplitudu od X
figure
plot(w, angle(X_simetricni))    % crta fazu od X
```

Što bi se dogodilo da smo fft() funkciji proslijedili simetričan nekauzalan odsječak?

Primjer 1:

```
x = [2 1 1 1 2];
X = fft(x)
X =
7.0000  1.3090 + 0.9511i   0.1910 + 0.5878i
0.1910 - 0.5878i   1.3090 - 0.9511i
```

Primjer 2:

```
x = [2 -1 1 -1];
X = fft(x)
X =
     1     1     5     1
```

MATLAB funkcija fft() će dani odsječak tretirati kao kauzalan, odnosno s kašnjenjem u iznosu $\Delta=(N-1)/2$ za neparne N, odnosno $\Delta=N/2$ za parne N u odnosu na stvarni kauzalni odsječak našeg periodičkog niza (ovo se najbolje vidi ako nacrtate primjere 1 i 2).

To u domeni transformacije X predstavlja množenje kompleksnom eksponencijalom:

$$X[k] = X_{\text{kauzalni}}[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\Delta k}$$

što je i vidljivo iz rezultata naših primjera.

U svim primjerima koji slijede često će biti potrebno konstruirati signal, izračunati DFT i prikazati rezultate transformacije. Stoga će se funkcija fftshift() vrlo često koristiti u obje domene.

DFT matrica

Diskretna Fourierova transformacija (DFT) definirana je sljedećim izrazom:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}, \tag{3}$$

što raspisano po uzorcima rezultata glasi:

$$X[0] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot 0} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot 0} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot 0} + \cdots + x[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot 0},$$

$$X[1] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot 1} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot 1} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot 1} + \cdots + x[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot 1},$$

$$\cdots$$

$$X[N-1] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot(N-1)} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot(N-1)} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot(N-1)} + \cdots + x[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot(N-1)},$$

Isto se može prikazati i matricom:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{N}} = \left[W_{\mathrm{N}}^{km}\right] \qquad W_{\mathrm{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}} & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot 2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot 4} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot(N-1)\cdot 2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Stupci DFT matrice su međusobno ortogonalni:

$$\mathbf{c}_k^{*T} \cdot \mathbf{c}_m = N\, \boldsymbol{\delta}[k-m].$$

Iz ovih činjenica slijedi da je:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{*T} \cdot \mathbf{W}_{\mathrm{N}} = NI,$$

što daje jednostavan recept za inverziju:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{*T}.$$

Takve matrice nazivamo **unitarnim**. Kako je DFT matrica i simetrična, potrebna je samo konjugacija i dijeljenje s *N*.

Kako u MATLAB-u zadati DFT matricu?

Elementi matrice su W_{N}^{km}. Uočimo da se eksponenti elemenata matrice *km* mogu konstruirati kao vanjski produkt vektora:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & N-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & N-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & N-1 & \cdots & (N-1)(N-1) \end{bmatrix}$$

Dobiveni rezultat se može iskoristiti za dobivanje DFT matrice. U MATLAB-u bi to glasilo:

```
w = exp(-j*2*pi/N);  W = w.^([0:N-1]' * [0:N-1]);
```

Za zadani *N*, sada možemo provjeriti ortogonalnost stupaca matrice. Skalarni produkt stupaca:

```
W(:,k)' * W(:,m)
```

bit će nula za *k* različit od *m*, a *N* za *k* jednak *m*.

Uočimo da u MATLAB-u operator ' podrazumijeva konjugaciju i transpoziciju (*eng. conjugate transpose*), dok je operator .' „obična" transpozicija.

Slijedi da je:

```
W' * W
```

dijagonalna matrica s vrijednošću *N* na dijagonali.

Za svaki zadani *N* možemo provjeriti i svojstvene vrijednosti matrice:

```
eig(W)
```

te se uvjeriti da im je svima apsolutna vrijednost jednaka korijenu iz *N*. Iz jednostavnog geometrijskog razmatranja možemo zaključiti da DFT matrica svim vektorima *x* jednako mijenja dužinu (za korijen iz *N*), odnosno energiju (za *N*).

Parsevalov teorem o očuvanju energije:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad \text{(u MATLAB-u: sum(conj(X).*X)/N)}$$

možemo promatrati kao posljedicu unitarnosti matrice, odnosno operatora transformacije.

Rezolucija u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

Efektivna širina ili radijus funkcije definiran je izrazom:

$$\Delta_{eff}^2 [x(t)] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_c)^2 |x(t)|^2 \, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt}, \tag{4}$$

gdje brojnik predstavlja 2. moment funkcije, a nazivnik ukupnu energiju. Centar koncentracije energije t_c funkcije $x(t)$ računa se prema izrazu:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |x(t)|^2 \, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt}, \tag{5}$$

Ovdje brojnik predstavlja prvi moment, a nazivnik opet ukupnu energiju. Na isti se način računaju vrijednosti efektivne širine spektra i centralna frekvencija.

Za primjer ćemo uzeti Gaussovu funkciju, a centar koncentracije energije i efektivnu širinu funkcije računat ćemo simbolički i numerički.

Slijedi simbolički račun u MATLAB-u.

```
t=sym('t', 'real')
x=exp(-t*t)
```

Centar koncentracije energije vremenskog signala računamo na sljedeći način:

```
tc=int(t*abs(x)^2,-inf,inf) / int(abs(x)^2,-inf,inf)
```

Rezultat je, očekivana, nula.

Slijedi računanje efektivne širine funkcije:

```
deltat= sqrt(int((t-tc)^2*abs(x)^2,-inf,inf) / int(abs(x)^2,-inf,inf))
```

Rezultat je ½, što se poklapa s formulom dobivenom na predavanjima (a=1).

Ponovimo istu stvar u frekvencijskoj domeni. Simbolička Fourierova transformacija naše funkcije dobiva se sljedećom naredbom:

```
X=fourier(x)
```

Funkcija X predstavlja Fourierovu transformaciju funkcije x , a frekvencija je predstavljena simboličkom varijablom w. Slijedi računanje centralne frekvencije

```
w = sym('w', 'real')
wc=int(w*abs(X)^2,-inf,inf) / int(abs(X)^2,-inf,inf)
```

što daje nulu. Računanje efektivne širine u frekvencijskoj domeni:

```
deltaw= sqrt(int((w-wc)^2*abs(X)^2,-inf,inf) / int(abs(X)^2,-inf,inf))
```

Rezultat je jedan.

Provjerimo produkt efektivnih širina u dvije domene:

```
deltat*deltaw
```

Ako smo sve dobro radili, rezultat je poznat: ½.

Sada ćemo ponoviti cijeli postupak na diskretnom signalu koristeći numeričke metode.

Prvo zadajemo diskretni Gaussov signal:

```
N=128;    T=1/16; % kvant vremena
n= [-N/2:N/2-1]'; % vektor koraka vremena
nT = n * T; % vektor vremena
y = exp(-nT.*nT);  stem(n, y); figure, plot(nT, y);
```

Sada računamo centar koncentracije energije

```
nTc = sum(nT.*abs(y).^2) / sum(abs(y).^2)
```

i efektivnu širinu funkcije

```
delta_nT = sqrt(sum(((nT-nTc).^2).*abs(y).^2) / sum(abs(y).^2))
```

Rezultati se dobro poklapaju s dobivenima simboličkim računom.

Fourierova transformacija diskretne funkcije u simetričnom obliku se dobiva ovako:

```
Y = fftshift(fft(ifftshift(y)));
```

Pripremimo vektore diskretnih frekvencija, nacrtamo rezultat i izmjerimo efektivnu širinu:

```
F = 1/T; % kvant frekvencije
k = n;  % vektor koraka frekvencije
kF = k / (N/2) * pi; % vektor normirane frekvencije (-pi do pi)
figure, stem(k, Y); figure, plot(kF, Y);
kFc = sum(kF.*abs(Y).^2) / sum(abs(Y).^2)
delta_kF = F*sqrt(sum(((kF-kFc).^2).*abs(Y).^2) / sum(abs(Y).^2))
```

Produkt efektivnih širina u dvije domene daje poznati iznos ½ :

```
delta_nT*delta_kF
```